

FIBRÉ VECTORIEL DE RANG $2n + 1$ SUR L'ESPACE \mathbb{P}^{2n+2}

MOHAMED BAHTITI

RÉSUMÉ. Nous construisons dans cet article des nouvelles familles de fibrés vectoriels algébriques de rang $2n + 1$ sur l'espace projectif complexe \mathbb{P}^{2n+2} à partir de deux fibrés de rang $2n$ sur \mathbb{P}^{2n+1} , le fibré de corrélation nulle pondéré et le fibré de Tango pondéré tout en utilisant la méthode de Kumar-Peterson-Rao. Nous construisons un autre exemple de fibré vectoriel de rang 3 sur $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^4$ différent de ce qui est présenté dans l'article de Kumar-Peterson-Rao, où \mathbb{K} est un corps quelconque.

ABSTRACT. We build in this paper new families of algebraic vector bundles of rank $2n + 1$ on the complex projective space \mathbb{P}^{2n+2} from two bundles of rank $2n$ on \mathbb{P}^{2n+1} , the weighted null correlation bundles and the weighted Tango bundles while using the method of Kumar-Peterson-Rao. We construct another example of vector bundle of rank 3 on $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^4$ different than the one presented in the paper of Kumar-Peterson-Rao, where \mathbb{K} is any field.

Date: March, 2016.

2010 Mathematics Subject Classification. 14J60, 14F05.

Mots-clés. Fibré de Tango pondéré, Fibré vectoriel de 0-corrélation pondéré.

Key words. Weighted Tango Bundles, weighted null-correlation bundles.

1. Introduction

Soient $n, \alpha, \gamma \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{Z}$ tels que $n > 0$, $\gamma > 0$, $\alpha \geq \beta$, $\alpha + \beta \geq 0$ et $\gamma > (2n + 1) \mid \beta \mid$. Soient U un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 2, et Q le fibré de quotient et $N(f)$ le fibré de corrélation nulle classique sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)$ pour $f \in (\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1}U)^* = H^0(Q^*(1))$ une $(2n + 2) \times (2n + 2)$ -matrice antisymétrique symplectique non dégénérée. Ces fibrés sont définis par les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(-1) \xrightarrow{g} \mathcal{S}^{2n+1}U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)} \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

et

$$0 \longrightarrow N(f) \longrightarrow Q \xrightarrow{T_{g \circ f}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(1) \longrightarrow 0.$$

Soit $F(W)$ le fibré de Tango pour $W \subset \bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1}U = (H^0(Q^*(1)))^*$ un sous-espace vectoriel tel que $\dim(W) = \binom{2n+2}{2} - 4n - 1$ et que W ne contient pas d'élément décomposable non nul de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1}U$. Ce fibré est défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_W} \left(\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \right) / W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0.$$

Tous les sous-espaces comme W , qui sont \mathbb{C}^* -invariants par rapport à la \mathbb{C}^* -action suivante

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \text{ avec } t \in \mathbb{C}^*,$$

forment l'ensemble \mathcal{W} qui était étudié dans le théorème 3.4 [1]. Dans le théorème 3.1.3, on trouve $W \in \mathcal{W}$ et $f := f_W \in (\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U)^* = H^0(Q^*(1))$ une $(2n+2) \times (2n+2)$ -matrice antisymétrique symplectique non dégénérée tels que

$${}^T \sigma_1 f \sigma_1 = a f \text{ et } \langle f, w \rangle = 0, \quad a \in \mathbb{C}^*, \text{ pour tout } w \in W$$

où \langle, \rangle est la forme quadriatique associée à $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$ dans 3.1.2. On trouve aussi D_W un sous-espace vectoriel \mathbb{C}^* -invariant de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$ tel que $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \simeq D_W \oplus W$. D'après la proposition 3.1.1, on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow (D_W / \mathbb{C}.f) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0.$$

On considère la transformée de Horrocks [1]

$$\mathbf{Iminvg} : \mathcal{FV}(\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U), \bar{\sigma}) \longrightarrow \mathcal{FV}(\mathbb{P}^{2n+1}),$$

où $\mathcal{FV}(\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U), \bar{\sigma})$ est la catégorie de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)$ qui sont \mathbb{C}^* -invariants au-dessus de l'action $\bar{\sigma} = t^\gamma \cdot \sigma_1$, et $\mathcal{FV}(\mathbb{P}^{2n+1})$ est la catégorie de fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^{2n+1} qui sont \mathbb{C}^* -invariants au-dessus de la multiplication usuelle sur \mathbb{C}^{2n+2} . Dans la proposition 3.1.4, on applique cette transformée sur la suite précédente pour obtenir la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \xrightarrow{\pi} \Upsilon_1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

où \mathcal{N} (resp. \mathcal{F}) est l'image inverse généralisée du fibré $N(f)$ dans la proposition 2.1.3 (resp. $F(W)$ dans la proposition 3.7 [1]), et

$$\Upsilon_1 = \bigoplus_{i=1}^{4n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\zeta_i),$$

avec

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \alpha(4n+1) + \beta, \zeta_2 = 4n\alpha + 2\beta, \dots, \zeta_{2n} = \alpha(2n+2) + 2n\beta, \zeta_{2n+1} = 2n\alpha + (2n+2)\beta, \\ &\dots, \zeta_{4n} = \alpha + (4n+1)\beta. \end{aligned}$$

Dans la proposition 3.1.5, pour la suite précédente il existe deux morphismes ϕ et ψ tels que le diagramme suivant est commutatif et exacte en Υ_1

$$\begin{array}{ccccc}
\Upsilon_1^*(-\hbar_1) & \xrightarrow{\phi} & \Upsilon_1 & \xrightarrow{\psi} & \bigwedge^{2n-1} \Upsilon_1^*(\hbar_2) \\
& \searrow & \nearrow \pi & \searrow \iota & \nearrow \\
& \mathcal{N}(-\gamma) & & \mathcal{F}(\gamma) & \\
& \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
0 & & 0 & & 0,
\end{array}$$

où $\hbar_1 = 2\gamma - (2n + 1)(\alpha + \beta)$ et $\hbar_2 = 2n\gamma + 3n(2n + 1)(\alpha + \beta)$. De plus, si

$$\gamma > \max\{|\alpha + \beta(4n + 1)| + (2n + 1)(\alpha + \beta), \alpha(4n + 1) + \beta\},$$

alors les deux morphismes ϕ et ψ sont des matrices de rang $2n$ et $\hbar_1 > 0$.

Soient $z \in H^0(\mathbb{P}^{2n+2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+2}}(1)) \setminus \{0\}$ et $\mathbb{P}^{2n+1} \subset \mathbb{P}^{2n+2}$ l'hyperplan de \mathbb{P}^{2n+2} défini par l'équation $z = 0$. Soient $\epsilon \geq 1$ un entier et $Y_{(\epsilon)} \subset \mathbb{P}^{2n+2}$ le voisinage infinitésimal de l'ordre ϵ de \mathbb{P}^{2n+1} dans \mathbb{P}^{2n+2} , défini par l'équation $z^\epsilon = 0$. Soit $J_{(\epsilon)} : Y_{(\epsilon)} \rightarrow \mathbb{P}^{2n+1}$ la projection d'un point, en dehors de $Y_{(\epsilon)}$, sur un sous-espace projectif \mathbb{P}^{2n+1} ([5] page 22). En appliquant l'image inverse de $J_{(\epsilon)}$ sur la suite exacte précédente, on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{(\epsilon)}(-\gamma) \xrightarrow{\pi} \Upsilon_{(\epsilon)} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}_{(\epsilon)}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{N}_{(\epsilon)} = J_{(\epsilon)}^* \mathcal{N}$ et $\mathcal{F}_{(\epsilon)} = J_{(\epsilon)}^* \mathcal{F}$, et

$$\Upsilon_{(\epsilon)} := J_{(\epsilon)}^* \Upsilon_1 = \bigoplus_{i=1}^{4n} \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(\zeta_i).$$

Nous utilisons la méthode de Kumar-Peterson-Rao dans l'article [14] (voir 2.2) pour construire un fibré vectoriel sur \mathbb{P}^{2n+2} à partir de la suite exacte précédente qui est définie sur $Y_{(\epsilon)}$.

Soit \mathcal{G} un fibré vectoriel sur \mathbb{P}^{2n+2} défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
& \Upsilon(-\epsilon) & \xlongequal{\quad} & \Upsilon(-\epsilon) & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \Upsilon & \longrightarrow & \mathcal{F}_{(\epsilon)}(\gamma) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_{(\epsilon)}(-\gamma) & \xrightarrow{\pi} & \Upsilon_{(\epsilon)} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{F}_{(\epsilon)}(\gamma) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où

$$\Upsilon := \bigoplus_{j=1}^{4n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+2}}(\zeta_j).$$

Dans le théorème 3.1.8, pour $n > 1$, soit

$$\Gamma := \bigoplus_{i=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+2}}(\zeta_{b_i}) \text{ avec } 1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{2n-1} \leq 4n.$$

On a:

- Si $\epsilon = \epsilon_1 := 2\gamma + (2n+1)(\alpha + \beta)$, alors il existe un fibré vectoriel \mathcal{E} de rang $2n+1$ sur \mathbb{P}^{2n+2} qui est défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \Gamma(-\epsilon_1) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

- Si $\epsilon = \epsilon_2 := 2n\gamma + n(2n+1)(\alpha + \beta)$, alors il existe un fibré vectoriel \mathcal{K} de rang $2n+1$ sur \mathbb{P}^{2n+2} qui est défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0.$$

Dans la proposition 3.1.9, on trouve des 3-fibrés sur \mathbb{P}^4 pour certaines valeurs de ϵ .

Dans la proposition 4.2.2, on trouve un autre exemple de 3-fibrés sur $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^4$ différent de l'exemple 4.1 de Kumar-Peterson-Rao [14] tout en utilisant l'identité de Binet-Cauchy, où \mathbb{K} est un corps quelconque. Parmi ces fibrés Il y a des fibrés qui sont différents du fibré de Tango pondéré provenant d'une image inverse généralisée sur \mathbb{P}^{2n+2} [1].

2. Préliminaires

2.1. Fibré de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} provenant d'une image inverse généralisée. Nous allons étudier dans cette partie un fibré de 0-corrélation pondéré sur \mathbb{P}^{2n+1} qui provient d'une image inverse généralisée de fibré de corrélation nulle classique spécial sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)$.

2.1.1. Définition du fibré de corrélation nulle classique sur \mathbb{P}^{2n+1} . Soient V un espace vectoriel complexe de dimension $\dim(V) = 2n+2$, $\mathbb{P}^{2n+1} = \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif complexe associé dont les points sont les droites de V , et $v \in V$ un point correspondant à la droite $x = \mathbb{C}.v \in P(V)$. On a l'inclusion canonique

$$\begin{aligned} g_x : (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1))_x &:= \mathbb{C}.v \hookrightarrow V \\ av &\longmapsto g_x(av) = av, \end{aligned}$$

où $a \in \mathbb{C}$. Alors on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow \mathcal{Q} \longrightarrow 0.$$

On a aussi le morphisme surjectif

$$\begin{aligned} {}^T g_x : V^* &\longrightarrow \mathbb{C}.v^* := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1},x}(1) \\ h &\longmapsto {}^T g_x(h), \end{aligned}$$

où ${}^T g_x(h)$ est la restriction de h à $\mathbb{C}.v$. Ce morphisme nous donne le morphisme surjectif suivant

$$V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{{}^T g} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0.$$

Soit $f : V \longrightarrow V^*$ un morphisme. On sait que f est antisymétrique si et seulement si, pour tout $u \in V$, $f(u)(u) = 0$. Alors $({}^T g_x \circ f \circ g_x)(v) = {}^T g_x(f(v))$, la restriction de $f(v)$ à $\mathbb{C}.v$, est nul si et seulement si $f(v)(v) = 0$.

Soit $f : V \longrightarrow V^*$ un isomorphisme antisymétrique. On peut définir la monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{f} V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{{}^T g} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0$$

qui peut s'écrire également

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{{}^T g \circ f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0.$$

On définit le *fibré de corrélation nulle classique* $N(f)$ sur \mathbb{P}^{2n+1} par la cohomologie de la monade précédente.

Maintenant, on considère $f : V \longrightarrow V^*$ un isomorphisme antisymétrique défini relativement à la base canonique de V par la $(2n+2) \times (2n+2)$ -matrice antisymétrique symplectique suivante

$$\begin{pmatrix} & & & & & -r_0 \\ & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \\ & & & -r_n & & \\ & & r_n & & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \\ & & & & & 0 \\ r_0 & & & & & \end{pmatrix}.$$

où $r_0, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{C}^*$. Par définition, le *fibré de corrélation nulle classique spécial* $N(f)$ sur \mathbb{P}^{2n+1} est la cohomologie de la monade suivante

$$(1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{{}^T g \circ f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0.$$

Donc on a les suites exactes suivantes

$$(2) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

où Q est le fibré de quotient vectoriel de rang $2n + 1$ sur \mathbb{P}^{2n+1} , et

$$(3) \quad 0 \longrightarrow N(f) \longrightarrow Q \xrightarrow{{}^T g \circ f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0.$$

2.1.2. Proposition. 1- Soient $f_1, f_2 : V \longrightarrow V^*$ des isomorphismes antisymétriques. Alors on a $N(f_1) \simeq N(f_2)$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = a.f_2$.

2- Soient $\kappa \in GL(V)$, $\bar{\kappa} \in PGL(V)$ son élément correspondant à κ et $f : V \longrightarrow V^*$ un isomorphisme antisymétrique. Alors on a

$$\bar{\kappa}^*(N(f)) \simeq N({}^T\kappa \circ f \circ \kappa).$$

3- Soient $N(f)$ le fibré de corrélation nulle classique spécial sur \mathbb{P}^{2n+1} et $\overline{\sigma(t)} \in PGL(V)$ une \mathbb{C}^* -action sur $\mathbb{P}(V)$, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$, qui est de la forme

$$\overline{\sigma(t)} := \begin{pmatrix} t^{a_0} & & & & \\ & t^{a_1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & t^{a_{2n}} & \\ 0 & & & & t^{a_{2n+1}} \end{pmatrix}$$

où $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_{2n} \geq a_{2n+1}$ sont des entiers tels que $a_i + a_{2n+1-i} = d \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \dots, 2n+1$. Alors on a un isomorphisme canonique

$$s_t : \overline{\sigma(t)}^* N(f) \simeq N(f),$$

tel que pour $t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*$, on a $s_{t_1.t_2} = s_{t_2} \circ \overline{\sigma(t_2)}^* (s_{t_1})$.

Démonstration. 1- Soit la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

Pour $f_1, f_2 : V \longrightarrow V^*$ des isomorphismes antisymétriques, on a les suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{Tb_1} Q^* \xrightarrow{d_1} N^*(f_1) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{Tb_2} Q^* \xrightarrow{d_2} N^*(f_2) \longrightarrow 0,$$

où $b_1 := ({}^Tg \circ f_1)$ et $b_2 := ({}^Tg \circ f_2)$. S'il existe $a \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = a.f_2$, alors on a $\ker({}^Tg \circ f_2) = \ker({}^Tg \circ f_1)$. Donc on obtient $N(f_1) \simeq N(f_2)$.

Si $N(f_1) \simeq N(f_2)$, alors on a $\psi : N^*(f_1) \xrightarrow{\sim} N^*(f_2)$. On a la suite suivante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Hom}(Q^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1)) &\longrightarrow \text{Hom}(Q^*, Q^*) \longrightarrow \text{Hom}(Q^*, N^*(f_2)) \\ &\longrightarrow \text{Ext}^1(Q^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1)) \longrightarrow, \end{aligned}$$

mais $\text{Hom}(Q^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1)) = 0$ et $\text{Ext}^1(Q^*, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1)) = 0$. On obtient que

$$\text{Hom}(Q^*, Q^*) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(Q^*, N^*(f_2))$$

Comme ψ est non trivial, donc $\psi \circ d_1 \neq 0$. Il existe un morphisme non trivial $\varphi : Q^* \longrightarrow Q^*$ tel que $\psi \circ d_1 = d_2 \circ \varphi$. D'après ([16], Lemma 1.2.8), on obtient que φ est un isomorphisme. Comme le fibré Q^* est simple, on obtient que φ est une homothétie. L'isomorphisme φ définit, localement en $x \in \mathbb{P}^{2n+1}$ où $x = \mathbb{C}.v$ pour un $v \in V$, un isomorphisme

$$\varphi_{1,x} : \mathbb{C}.v \xrightarrow{a \times} \mathbb{C}.v$$

tel que $a.^T b_2 =^T b_2 \circ \varphi_1 = \varphi \circ^T b_1 =^T b_1$, pour $a \in \mathbb{C}^*$. Donc on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) & \xrightarrow{^T b_1} & Q^* & \xrightarrow{d_1} & N^*(f_1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) & \xrightarrow{^T b_2} & Q^* & \xrightarrow{d_2} & N^*(f_2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

et on a $(a.f_2) \circ g = f_1 \circ g$, pour tout $g : X \hookrightarrow V$ où X est une droite dans V , ce qui donne $f_1 = a.f_2$.

2- Pour la monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{^T g \circ f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0$$

et d'après la définition de l'image inverse, on a $\bar{\kappa}^*(g) = \kappa \circ g$ et $\bar{\kappa}^*(^T g) =^T (\kappa \circ g)$ qui donnent la monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-1) \xrightarrow{\kappa \circ g} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{^T (\kappa \circ g) \circ f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(1) \longrightarrow 0.$$

Donc on a

$$\bar{\kappa}^*(N(f)) \simeq N(^T \kappa \circ f \circ \kappa).$$

Soit $f : V \longrightarrow V^*$ un isomorphisme antisymétrique défini relativement à la base canonique de V par la $(2n+2) \times (2n+2)$ -matrice antisymétrique symplectique, comme dans la définition 2.1.1. Il suffit de remarquer que $^T \sigma(t) \circ f \circ \sigma(t) = t^d f$, pour tout $t \in C^*$. On obtient donc un isomorphisme canonique

$$s_t : \overline{\sigma(t)}^* N(f) \simeq N(f),$$

tel que pour $t_1, t_2 \in \mathbb{C}^*$ on a $s_{t_1.t_2} = s_{t_2} \circ \overline{\sigma(t_2)}^* (s_{t_1})$,

$$\begin{array}{ccc} \overline{\sigma(t_2)}^* \overline{\sigma(t_1)}^* N(f) = \overline{\sigma(t_1.t_2)}^* N(f) & \xrightarrow{s_{t_1.t_2}} & N(f) \\ & \searrow \overline{\sigma(t_2)}^* (s_{t_1}) & \nearrow s_{t_2} \\ & \overline{\sigma(t_2)}^* N(f). & \end{array}$$

□

2.1.3. Proposition. Soient U un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 2, et $\{x, y\}$ sa base. Soient $i, n, \alpha, \gamma \in \mathbb{N}$ et $\beta \in \mathbb{Z}$ tels que $n > 1$, $\gamma > 0$, $\alpha \geq \beta$, $\alpha + \beta \geq 0$ et $\gamma > (2n+1) \mid \beta \mid$, et g_0, \dots, g_{2n+1} des formes homogènes sans un zéro commun sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)$ telles que

$$\deg(g_i) = \gamma + (2n+1)\alpha + i(\beta - \alpha), \quad i = 0, 1, \dots, 2n+1.$$

Soient

$$H_0 := \{x^{2n+1-j}y^j, \quad 0 \leq j \leq 2n+1\}$$

la base canonique de $\mathcal{S}^{2n+1} U$, Q le fibré de quotient et $N(f)$ le fibré de corrélation nulle classique spécial sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)$. Les fibrés Q et $N(f)$ sont définis par les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)}(-1) \xrightarrow{g} \mathcal{S}^{2n+1} U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)} \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow N(f) \longrightarrow Q \xrightarrow{Tg \circ f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(1) \longrightarrow 0.$$

où g est l'inclusion canonique, et $f : \mathcal{S}^{2n+1}U \longrightarrow \mathcal{S}^{2n+1}U^*$ est un isomorphisme antisymétrique défini relativement à la base canonique précédente de $\mathcal{S}^{2n+1}U$ par la $(2n+2) \times (2n+2)$ -matrice antisymétrique symplectique, comme dans la définition 2.1.1.

Alors le fibré Q (resp. $N(f)$) a une image inversée généralisée $Q_{\gamma,\alpha,\beta}$ (resp. $N_{\gamma,\alpha,\beta}$) définie par

$$(4) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \xrightarrow{g(-\gamma)} \mathcal{S}^{2n+1}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta} \longrightarrow 0$$

$$(5) \quad (\text{resp. } 0 \longrightarrow \mathcal{N}_{\gamma,\alpha,\beta} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta} \xrightarrow{(Tg \circ f)(-\gamma)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma + (\alpha + \beta)(2n+1)) \longrightarrow 0),$$

où $\mathcal{U} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\beta)$, $\mathcal{N}_{\gamma,\alpha,\beta} := N_{\gamma,\alpha,\beta}(-\gamma)$ et $\mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta} := Q_{\gamma,\alpha,\beta}(-\gamma)$. On appelle le fibré $\mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta}$ le fibré de quotient pondéré par les poids γ, α, β , provenant d'une image inverse généralisée sur \mathbb{P}^{2n+1} . On appelle le fibré $\mathcal{N}_{\gamma,\alpha,\beta}$ le fibré de 0-corrélation pondéré par les poids γ, α, β , provenant d'une image inverse généralisée sur \mathbb{P}^{2n+1} .

Démonstration. On considère l'application

$$\begin{aligned} \omega := (g_0, \dots, g_{2n+1}) : \mathbb{C}^{2n+2} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathcal{S}^{2n+1}U \setminus \{0\} \\ v &\longmapsto (g_0(v), \dots, g_{2n+1}(v)) \end{aligned}$$

On considère l'action de \mathbb{C}^* sur $\mathcal{S}^{2n+1}U$

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}^* \times \mathcal{S}^{2n+1}U &\longrightarrow \mathcal{S}^{2n+1}U \\ (t, u) &\longmapsto t^\gamma \cdot \begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix} \cdot u. \end{aligned}$$

Cette action est représentée par la matrice

$$t^\gamma \cdot \begin{pmatrix} t^{(2n+1)\alpha} & & & & \\ & t^{(2n+1)\alpha+(\beta-\alpha)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & t^{(2n+1)\alpha+2n(\beta-\alpha)} & \\ 0 & & & & t^{(2n+1)\beta} \end{pmatrix} \in PGL(\mathcal{S}^{(2n+1)}U).$$

On considère aussi l'action de \mathbb{C}^* (multiplication usuelle sur \mathbb{C}^{2n+2})

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{2n+2} &\longrightarrow \mathbb{C}^{2n+2} \\ (t, u) &\longmapsto t.u. \end{aligned}$$

Alors ω est une \mathbb{C}^* -application par rapport à ces deux actions. L'action σ induit une action $\bar{\sigma} \in PGL(\mathcal{S}^{2n+1}U)$ de \mathbb{C}^* sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)$, et l'action T induit une action triviale de \mathbb{C}^* sur \mathbb{P}^{2n+1} . On a donc une transformée de Horrocks [1]

$$\mathbf{Iminvg} : \mathcal{FV}(\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U), \bar{\sigma}) \longrightarrow \mathcal{FV}(\mathbb{P}^{2n+1}),$$

où $\mathcal{FV}(\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U), \bar{\sigma})$ est la catégorie de fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)$ qui sont \mathbb{C}^* -invariants au-dessus de l'action $\bar{\sigma}$, et $\mathcal{FV}(\mathbb{P}^{2n+1})$ est la catégorie de fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^{2n+1} qui sont \mathbb{C}^* -invariants au-dessus de l'action T . On considère le morphisme

$$g := {}^T\omega : \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(-1) \longrightarrow \mathcal{S}^{2n+1}U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)},$$

avec $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(-1)$, $\mathcal{S}^{2n+1}U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}$ qui sont munis de l'action canonique $\sigma(t)$. Alors g est un \mathbb{C}^* -morphisme. Comme on a, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$,

$$\sigma(t).(x^{2n+1-i}.y^i) = t^{\gamma+(2n+1)\alpha+i(\beta-\alpha)}.(x^{2n+1-i}.y^i),$$

alors le sous-fibré $(x^{2n+1-i}.y^i.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}$ de $\mathcal{S}^{2n+1}U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}$ est \mathbb{C}^* -invariant. On obtient

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}^{(\gamma+(2n+1)\alpha+i(\beta-\alpha))} \simeq (x^{2n+1-i}.y^i.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)},$$

qui est défini localement, pour tout $v \in \mathcal{S}^{2n+1}U$, par

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}^{(\gamma+(2n+1)\alpha+i(\beta-\alpha))})_v &\simeq \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} ((x^{2n+1-i}.y^i.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)})_v \simeq x^{2n+1-i}.y^i.\mathbb{C} \\ a &\longmapsto ax^{2n+1-i}.y^i. \end{aligned}$$

Donc on a un \mathbb{C}^* -isomorphisme

$$\mathcal{S}^{2n+1}U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)} \simeq \bigoplus_{i=0}^{2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}^{(\gamma+(2n+1)\alpha+i(\beta-\alpha))}.$$

Alors on a un \mathbb{C}^* -morphisme

$$g := {}^T\omega : \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(-1) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}^{(\gamma+(2n+1)\alpha+i(\beta-\alpha))}.$$

On considère le morphisme

$$B := {}^Tg \circ f : \mathcal{S}^{2n+1}U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(1),$$

avec $\mathcal{S}^{2n+1}U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(1)$) qui est muni de l'action canonique $\sigma(t)$ (resp. de $\widehat{\sigma(t)}$ l'action duale de $\sigma(t)$). Pour que le morphisme B soit un \mathbb{C}^* -morphisme il faut avoir

$$B_v(\sigma(t).v_1) = t^q \widehat{\sigma(t)}.B_v(v_1),$$

pour tout $v, v_1 \in \mathcal{S}^{2n+1}U$, q un entier et

$$B_v : \mathcal{S}^{2n+1}U \longrightarrow (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(1))_v = (\mathbb{C}.v)^{-1}.$$

Alors on obtient $q = 2\gamma + (2n+1)(\beta+\alpha)$. Donc il faut que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(1)$ soit muni de l'action duale $\widehat{\sigma(t)}$ multipliée par le caractère $t^{2\gamma+(2n+1)(\beta+\alpha)}$. Donc B est le \mathbb{C}^* -morphisme suivant

$$B : \bigoplus_{i=0}^{2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}^{(\gamma+(2n+1)\alpha+i(\beta-\alpha))} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(1)^{(2\gamma+(2n+1)(\beta+\alpha))}.$$

Donc on a la \mathbb{C}^* -monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(-1) \xrightarrow{g} \bigoplus_{i=0}^{2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}^{(\gamma+(2n+1)\alpha+i(\beta-\alpha))} \xrightarrow{B} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(1)^{(2\gamma+(2n+1)(\beta+\alpha))} \longrightarrow 0.$$

D'après la définition 2.2 et la proposition 2.3 en [1], on obtient que

$$\mathbf{Iminvg}\left(\bigoplus_{i=0}^{2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}^{(\gamma+(2n+1)\alpha+i(\beta-\alpha))}\right) = \bigoplus_{i=0}^{2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma + (2n+1)\alpha + i(\beta - \alpha)) = \mathcal{S}^{2n+1}\mathcal{U}(\gamma)$$

et

$$\mathbf{Iminvg}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(1)^{(2\gamma+(2n+1)(\beta+\alpha))}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(2\gamma + (2n+1)(\beta + \alpha)),$$

et

$$\mathbf{Iminvg}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1}U)}(-1)) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}},$$

où $\mathcal{U} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\alpha) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\beta)$. Comme le fibré Q a une $GL(\mathcal{S}^{2n+1}U)$ -action donc il a une \mathbb{C}^* -action, ce qui donne qu'il est \mathbb{C}^* -invariant au-dessus de l'action $\overline{\sigma(t)}$. D'après la proposition 2.1.2, on obtient

$$\overline{\sigma(t)}^*N(f) \simeq N(f).$$

On obtient donc $\mathbf{Iminvg}(Q) = Q_{\gamma,\alpha,\beta}$ et $\mathbf{Iminvg}(N(f)) = N_{\gamma,\alpha,\beta}$. Alors on a la monade suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{g} \mathcal{S}^{2n+1}\mathcal{U}(\gamma) \xrightarrow{B} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(2\gamma + (2n+1)(\beta + \alpha)) \longrightarrow 0$$

qui nous donne les deux suites exactes suivantes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{g} \mathcal{S}^{2n+1}\mathcal{U}(\gamma) \longrightarrow Q_{\gamma,\alpha,\beta} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow N_{\gamma,\alpha,\beta} \longrightarrow Q_{\gamma,\alpha,\beta} \xrightarrow{Tg \circ f} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(2\gamma + (2n+1)(\beta + \alpha)) \longrightarrow 0.$$

Donc on obtient

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(-\gamma) \xrightarrow{g(-\gamma)} \mathcal{S}^{2n+1}\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{\gamma,\alpha,\beta} \longrightarrow \mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta} \xrightarrow{(Tg \circ f)(-\gamma)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma + (2n+1)(\beta + \alpha)) \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{Q}_{\gamma,\alpha,\beta} := Q_{\gamma,\alpha,\beta}(-\gamma)$, et $\mathcal{N}_{\gamma,\alpha,\beta} := N_{\gamma,\alpha,\beta}(-\gamma)$.

□

2.1.4. Proposition. Soit $\mathcal{N} := \mathcal{N}_{\gamma,\alpha,\beta}$ le fibré de 0-corrélation pondéré provenant d'une image inverse généralisée sur \mathbb{P}^{2n+1} qui est défini dans la proposition 2.1.3. Alors le fibré \mathcal{N} est un fibré symplectique ($\mathcal{N}^*((\alpha + \beta)(2n+1)) = \mathcal{N}$).

Démonstration. voir l'article [2].

□

2.2. Technique de construction d'un fibré sur une variété lisse. Kumar-Peterson-Rao ont présenté dans leur article [14] une méthode pour construire un fibré vectoriel sur une variété projective lisse X à partir de deux fibrés vectoriels sur une sous-variété de X .

Soient X une variété projective lisse, Y un diviseur de X correspondant à une section $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(Y))$ et $i : Y \hookrightarrow X$ le morphisme d'inclusion. On notera D le faisceau i_*D pour tout faisceau cohérent D sur la variété Y .

Supposons que l'on ait la suite exacte suivante de fibrés vectoriels sur Y

$$0 \longrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{a} \mathbb{F} \xrightarrow{b} \mathbb{B} \longrightarrow 0$$

et que l'on ait \hat{F} un fibré vectoriel sur X tel que la restriction sur Y est $\hat{F}|_Y = \mathbb{F}$. On définit G un fibré vectoriel sur X par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \hat{F}(-Y) & \xlongequal{\quad} & \hat{F}(-Y) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \hat{F} & \longrightarrow & \mathbb{B} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{A} & \longrightarrow & \mathbb{F} & \longrightarrow & \mathbb{B} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

On obtient que le rang du fibré G est $rg(G) = rg(\mathbb{A}) + rg(\mathbb{B})$. Supposons maintenant qu'il y ait aussi deux fibrés vectoriels \hat{L}_1, \hat{L}_2 sur X avec $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2$ leurs restrictions sur Y telles qu'il existe un morphisme surjectif de fibrés $f : \mathbb{L}_1 \longrightarrow \mathbb{A}$ et un morphisme injectif de fibrés $g : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{L}_2$. Soit le morphisme f (resp. g) tel que le composé $\phi : \mathbb{L}_1 \xrightarrow{f} \mathbb{A} \xrightarrow{a} \mathbb{F}$ (resp. $\psi : \mathbb{F} \xrightarrow{b} \mathbb{B} \xrightarrow{g} \mathbb{L}_2$) sur Y se relève en un morphisme $\Phi : \hat{L}_1 \longrightarrow \hat{F}$ (resp. $\Psi : \hat{F} \longrightarrow \hat{L}_2$) sur X . Donc on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \hat{L}_1 & \xrightarrow{\Phi} & \hat{F} & \xrightarrow{\Psi} & \hat{L}_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{L}_1 & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{F} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{L}_2 \\ & \searrow f & \nearrow a & \searrow b & \nearrow g \\ & \mathbb{A} & & \mathbb{B} & \\ \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

2.2.1. Lemme. ([14], proposition 2.1). On a un morphisme de fibrés vectoriels Δ qui est défini de la façon suivante

$$\Delta : \hat{F}(-Y) \oplus \hat{L}_1 \longrightarrow \hat{F} \oplus \hat{L}_2(-Y)$$

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|c} sI & \Phi \\ \hline \Psi & s^{-1}\Psi\Phi \end{array} \right).$$

Le morphisme Δ se factorise de la façon suivante

$$\begin{array}{ccc} \hat{F}(-Y) \oplus \hat{L}_1 & \xrightarrow{\Delta} & \hat{F} \oplus \hat{L}_2(-Y) \\ & \searrow \Delta_1 \quad \nearrow \Delta_2 & \\ & G & \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ 0 & & 0 \end{array}$$

où $\Delta_2 : G \longrightarrow \hat{F} \oplus \hat{L}_2(-Y)$ est un morphisme injectif de fibrés, et $\Delta_1 : \hat{F}(-Y) \oplus \hat{L}_1 \longrightarrow G$ est un morphisme surjectif de fibrés.

Démonstration. voir [14]. □

2.2.2. Proposition. ([14], proposition 2.2). Soient \hat{N}_1, \hat{N}_2 des fibrés vectoriels sur X et $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2$ leurs restrictions sur Y respectivement tels que $\hat{F} = \hat{N}_1 \oplus \hat{N}_2$ et $\mathbb{F} = \mathbb{N}_1 \oplus \mathbb{N}_2$. Soit

$$\pi_1 : \mathbb{N}_1(-Y) \longrightarrow \mathbb{A}$$

un morphisme qui se relève en un morphisme

$$\pi : \hat{N}_1(-Y) \longrightarrow \hat{L}_1$$

tel que $\text{Im}(\Phi\pi) \subset \hat{N}_2$. Le morphisme $\mu : \hat{N}_1(-Y) \longrightarrow G$ est injectif si et seulement si sa restriction à Y l'est.

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & \hat{N}_1(-Y) & & \\ & \swarrow i_1 & \downarrow \mu & \searrow \mu_1 & \\ \hat{N}_1(-Y) \oplus \hat{N}_2(-Y) \oplus \hat{L}_1 & \xrightarrow{\Delta} & \hat{N}_1 \oplus \hat{N}_2 \oplus \hat{L}_2(-Y) & & \\ & \searrow \Delta_1 & \downarrow \Delta & \nearrow \Delta_2 & \\ & & G & & \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

où i_1 est un morphisme d'inclusion et le morphisme

$$\mu_1 : \hat{N}_1(-Y) \longrightarrow \hat{N}_1 \oplus \hat{N}_2 \oplus \hat{L}_2(-Y)$$

est défini par

$$\mu_1 := \begin{pmatrix} sI \\ \Phi\pi \\ s^{-1}\Psi\Phi\pi + \Psi i \end{pmatrix}.$$

où $i : \hat{N}_1 \hookrightarrow \hat{N}_1 \oplus \hat{N}_2$ est une inclusion. On en déduit que $\mu = \mu_1$ et que le morphisme μ_1 est injectif sur $X - Y$. Donc le morphisme $\mu : \hat{N}_1(-Y) \longrightarrow G$ est injectif si et seulement si sa restriction à Y l'est.

□

2.2.3. Remarque. Dans l'application de la proposition 2.2.2, on va construire directement le morphisme injectif de fibrés $\mu : \hat{N}_1(-Y) \longrightarrow G$ tout en utilisant le fait que: si $rg(\mathbb{N}_1) < rg(\mathbb{N}_2)$ et $rg(\mathbb{A}) = rg(\mathbb{B})$ alors on a $rg(\mathbb{N}_1) \leq rg(\mathbb{A}) - 1$.

2.2.4. Proposition. ([14], proposition 2.3). Soient \hat{M}_1, \hat{M}_2 des fibrés vectoriels sur X et $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2$ leurs restrictions sur Y respectivement tels que $\hat{F} = \hat{M}_1 \oplus \hat{M}_2$ et $\mathbb{F} = \mathbb{M}_1 \oplus \mathbb{M}_2$. Soit

$$d_1 : \mathbb{B}(-Y) \longrightarrow \mathbb{M}_1$$

un morphisme qui se relève en un morphisme

$$d : \hat{L}_2(-Y) \longrightarrow \hat{M}_1$$

tel que $d\Psi$ s'annule sur $\hat{M}_1(-Y)$. Le morphisme $\delta : G \longrightarrow \hat{M}_1$ est surjectif si et seulement si sa restriction à Y l'est.

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \hat{M}_1 & & \\
 & \nearrow \delta_1 & \uparrow & \nwarrow p_1 & \\
 \hat{M}_1(-Y) \oplus \hat{M}_2(-Y) \oplus \hat{L}_1 & \xrightarrow{\Delta} & \hat{M}_1 \oplus \hat{M}_2 \oplus \hat{L}_2(-Y) & & \\
 & \searrow \Delta_1 & \downarrow \delta & \nearrow \Delta_2 & \\
 & & G & & \\
 0 & \nearrow & & \nwarrow & 0
 \end{array}$$

où p_1 est un morphisme projection et le morphisme

$$\delta_1 : \hat{M}_1(-Y) \oplus \hat{M}_2(-Y) \oplus \hat{L}_1 \longrightarrow \hat{M}_1$$

est défini par

$$\delta_1 := \begin{pmatrix} sI & d\Psi & ds^{-1}\Psi\Phi + p\Phi \end{pmatrix}.$$

où $p : \hat{M}_1 \oplus \hat{M}_2 \longrightarrow \hat{M}_1$ est une projection. On en déduit que $\delta = \delta_1$ et que le morphisme δ_1 est surjectif sur $X - Y$. Donc le morphisme $\delta : G \longrightarrow \hat{M}_1$ est surjectif si et seulement si sa restriction à Y l'est. \square

2.2.5. Théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch. (Hartshorne, [5]). Soient X une variété projective lisse sur un corps \mathbb{K} et F un faisceau cohérent sur X . On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{ch(\bullet).td(X)} & CH^*(X) \\ \chi(X, \bullet) \downarrow & & \downarrow deg(\bullet) \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \end{array}$$

$$\chi(X, F) = deg(ch(F).td(X))$$

où $deg(\bullet)$ est l'application de degré, $ch(F)$ le caractère de Chern de F , $K(X)$ l'anneau de Grothendieck de X , $CH^*(X)$ l'anneau de Chow de X et $td(X)$ les classes de Todd de X .

Démonstration. voir [5]. \square

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques. A l'aide du théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch, on peut calculer les classes de Chern de l'image directe d'un fibré F défini sur la variété X .

2.2.6. Définition. Un morphisme $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme fini si et seulement s'il existe un recouvrement des ouverts affines $V_i = \text{Spec}(B_i)$ de Y tels que $f^{-1}(V_i) = \text{Spec}(A_i)$ où A_i est une B_i -algèbre de type fini, pour tout i .

2.2.7. Lemme. (Le Potier [15]). Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme fini de variétés algébriques et F un faisceau cohérent sur X .

1 - Le faisceau f_*F est cohérent et $R^q f_*F = 0$ pour $q > 0$.

2 - On a $H^q(X, F) = H^q(Y, f_*F)$ pour tout intègre q . En particulier si X et Y sont des variétés projectives, alors on a

$$\chi(X, F(t)) = \chi(Y, f_*F(t)) \text{ pour } t \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. voir [15]. \square

2.2.8. Proposition. Soient $z \in H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \setminus \{0\}$ et $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ l'hyperplan de \mathbb{P}^n défini par l'équation $z = 0$. Soient $\epsilon \geq 1$ un entier positif et $Y_{(\epsilon)} \subset \mathbb{P}^n$ le voisinage infinitésimal de l'ordre ϵ de \mathbb{P}^{n-1} dans \mathbb{P}^n défini par l'équation $z^\epsilon = 0$. Soient les morphismes d'inclusion suivants

$$\mathbb{P}^{n-1} := Y_{(1)} \xrightarrow{b_{(2)}} Y_{(2)} \xrightarrow{b_{(3)}} \dots \xrightarrow{b_{(\epsilon)}} Y_{(\epsilon)} \xrightarrow{d} \mathbb{P}^n.$$

Soient \widehat{F} un fibré vectoriel sur \mathbb{P}_{n-1} de rang r dont les classes de Chern sont $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-1}$, $F_{(\epsilon)}$ un faisceau cohérent sur $Y_{(\epsilon)}$ tel que $\widehat{F} = F_{(\epsilon)|\mathbb{P}_{n-1}} := F_{(1)}$ et $F = d_*(F_{(\epsilon)})$ un faisceau cohérent sur \mathbb{P}_n dont les classes de Chern sont $c'_1, c'_2, c'_3, \dots, c'_n$. Alors

$$c'_1 = r\epsilon, \quad c'_2 = \epsilon^2 \left(\frac{r(r+1)}{2} \right) - \epsilon c_1$$

$$c'_3 = \epsilon^3 \left(\frac{r(r+1)(r+2)}{6} \right) - \epsilon^2(r+1)c_1 + \epsilon(c_1^2 - 2c_2)$$

$$c'_4 = \epsilon^4 \left(\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24} \right) - \epsilon^3 \left(\frac{(r+2)(r+1)}{2} \right) c_1 +$$

$$\epsilon^2((r+2)c_1^2 - (2r+3)c_2) + \epsilon(-c_1^3 + 3c_1c_2 - 3c_3).$$

Démonstration. D'après l'exemple 15.1.2 dans [4]: Pour E un faisceau cohérent de rang r dont les classes de Chern sont c_1, c_2, \dots, c_n sur $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$, on a

$$ch(E) = r + h_1 + \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{3!}h_3 + \dots + \frac{1}{n!}h_n + \dots$$

où

$$h_i = \det \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2c_2 & c_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ic_i & c_{i-1} & c_{i-2} & \dots & c_1 \end{pmatrix}.$$

et

$$td(\mathbb{P}^n) = 1 + T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n + \dots$$

où

$$T_0 = 1, T_1 = \frac{1}{2}\alpha_1, T_2 = \frac{1}{12}(\alpha_1^2 + \alpha_2), T_3 = \frac{1}{24}(\alpha_1\alpha_2), \dots$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont les classes de Chern du fibré $Q(1)$ qui est défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow Q \longrightarrow 0.$$

D'après le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch sur la variété \mathbb{P}^n , on a

$$\chi(\mathbb{P}^n, E(t)) = \frac{r}{n!} \cdot t^n + \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{(n-i)!} \cdot t^{n-i}$$

où $A_i = rT_i + \sum_{j=0}^{i-1} T_{i-j-1} \cdot h_{j+1}$, $i = 1, 2, \dots, n$ et pour tout $t \in \mathbb{Z}$. De la suite exacte sur $Y_{(\epsilon)}$

$$0 \longrightarrow F_{(\epsilon-1)}(-1) \longrightarrow F_{(\epsilon)} \longrightarrow F_{(1)} \longrightarrow 0,$$

on obtient alors que

$$\chi(Y_{(\epsilon)}, F_{(\epsilon)}(t)) = \sum_{k=0}^{\epsilon-1} \chi(\mathbb{P}^{n-1}, F_{(1)}(t-k)).$$

Comme l'immersion fermée affine d est un morphisme fini, en utilisant le lemme 2.2.7, on obtient que

$$\sum_{k=0}^{\epsilon-1} \chi(\mathbb{P}^{n-1}, F_{(1)}(t-k)) = \chi(Y_{(\epsilon)}, F_{(\epsilon)}(t)) = \chi(\mathbb{P}^n, F(t)).$$

Alors on en déduit

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\epsilon-1} \left\{ \frac{r}{(n-1)!} \cdot (t-k)^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A'_i}{(n-1-i)!} \cdot (t-k)^{n-1-i} \right\} = \\ & \sum_{k=0}^{\epsilon-1} \left\{ \frac{r}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} + \left(\frac{r \cdot k}{(n-2)!} + \frac{A'_1}{(n-2)!} \right) \cdot t^{n-2} + \right. \\ & \quad \left(\frac{r \cdot k^2}{2! \cdot (n-3)!} - \frac{A'_1 \cdot k}{(n-3)!} + \frac{A'_2}{(n-3)!} \right) \cdot t^{n-3} + \\ & \quad \left(-\frac{r \cdot k^3}{3! \cdot (n-4)!} + \frac{A'_1 \cdot k^2}{(n-4)!} - \frac{A'_2 \cdot k}{(n-4)!} + \frac{A'_3}{(n-4)!} \right) \cdot t^{n-4} \Big\} + \dots = \\ & = \frac{rg(F)}{n!} \cdot t^n + \frac{A_1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} + \frac{A_2}{(n-2)!} \cdot t^{n-2} + \frac{A_3}{(n-3)!} \cdot t^{n-3} + \frac{A_4}{(n-4)!} \cdot t^{n-4} + \dots \end{aligned}$$

Ces polynômes étant les mêmes, on peut identifier les coefficients et obtenir des équations permettant d'obtenir $rg(F) = 0$ et

$$c'_1 = r\epsilon, \quad c'_2 = \epsilon^2 \left(\frac{r(r+1)}{2} \right) - \epsilon c_1$$

$$c'_3 = \epsilon^3 \left(\frac{r(r+1)(r+2)}{6} \right) - \epsilon^2(r+1)c_1 + \epsilon(c_1^2 - 2c_2)$$

$$c'_4 = \epsilon^4 \left(\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{24} \right) - \epsilon^3 \left(\frac{(r+2)(r+1)}{2} \right) c_1 +$$

$$\epsilon^2((r+2)c_1^2 - (2r+3)c_2) + \epsilon(-c_1^3 + 3c_1c_2 - 3c_3).$$

□

3. Fibré vectoriel de rang $2n + 1$ sur \mathbb{P}^{2n+2}

3.1. Fibré vectoriel de rang $2n + 1$ sur \mathbb{P}^{2n+2} . Pour obtenir un fibré vectoriel de rang $2n + 1$ sur la variété projective \mathbb{P}^{2n+2} , nous allons établir la relation entre le fibré de Tango pondéré provenant d'une image inverse généralisée en [1] et le fibré de 0-corrélation pondéré provenant d'une image inverse généralisée sur \mathbb{P}^{2n+1} en 2.1.1.

3.1.1. Proposition. *Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $\dim(V) = 2n + 2$, et $f \in \bigwedge^2 V^* = H^0(Q^*(1))$ une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée qui correspond à l'hyperplan $H \subset \bigwedge^2 V = (H^0(Q^*(1)))^*$, et $W \subset \bigwedge^2 V = (H^0(Q^*(1)))^*$ un sous-espace vectoriel vérifiant la condition (*) en [1]. Soient $N(f)$ et $F(W)$ le fibré de corrélation nulle classique et le fibré de Tango correspondants respectivement à f et à W . Si $W \subset H$, Alors on a la suite exacte suivante*

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow (H/W) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Le fibré $N(f)$ est défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{Tf \circ g} Q^*(1) \longrightarrow N(f)(1) \longrightarrow 0.$$

Alors on a la suite exacte de la cohomologie

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}f \xrightarrow{H^0(Tf \circ g)} H^0(Q^*(1)) \simeq \bigwedge^2 V^* \longrightarrow H^0(N(f)(1)) \longrightarrow 0$$

ou bien

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{H^0(Tf \circ g)} H^0(Q^*(1)) \simeq \bigwedge^2 V^* \longrightarrow H^0(N(f)(1)) \longrightarrow 0$$

Où $H^0(Tf \circ g)(a) := a.f$ pour tout $a \in \mathbb{C}$. Alors on a $H^0(Tf \circ g)(1) = f$, c'est-à-dire on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & 0 \\
 & & & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & \xrightarrow{Tf \circ g} & Q^*(1) \\
 & & \searrow -Tf & & \uparrow ev_{Q^*(1)} \\
 & & & & \bigwedge^2 V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}
 \end{array}$$

dont le dual est

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & & & \\
\downarrow & & & & \\
Q(-1) & \xrightarrow{Tg \circ f} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & \nearrow f & & & \\
\Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & & & &
\end{array}$$

Comme $f : \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{C}$ est une application linéaire surjective, on considère la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \bigwedge^2 V \xrightarrow{f} \mathbb{C} \longrightarrow 0.$$

Si $W \subset H$, alors on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & & & \\
\uparrow & & & & \\
((\Lambda^2 V)/W) & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{C} & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & \nearrow f & & & \\
\Lambda^2 V & & & &
\end{array}$$

et $\ker(\bar{f}) = H/W$. Alors on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow H/W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow \left((\bigwedge^2 V)/W \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \xrightarrow{\bar{f}} \mathbb{C} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow 0.$$

On obtient donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & & & \\
\downarrow & & & & \\
Q(-1) & \xrightarrow{Tg \circ f} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \parallel & & \\
\Lambda^2 V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & \xrightarrow{f} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & \nearrow \bar{f} & & & \\
((\Lambda^2 V)/W) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & & & &
\end{array}$$

Où $Q(-1) \rightarrow ((\Lambda^2 V)/W) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}$ est le morphisme injectif ϖ_W dans la suite exacte

$$0 \longrightarrow Q(-1) \xrightarrow{\varpi_W} \left((\bigwedge^2 V)/W \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0.$$

Donc on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 0 & \longrightarrow & N(f)(-1) & \longrightarrow & Q(-1) & \xrightarrow{Tg \circ f} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h & & \downarrow \varpi_W & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & H/W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & \longrightarrow & ((\wedge^2 V)/W) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{coker}(h) & \longrightarrow & F(W)(1) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

D'après le lemme de serpent, on obtient que $\text{coker}(h) \simeq F(W)(1)$ qui donne la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow H/W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0.$$

□

A partir de maintenant, nous allons nous intéresser au fibré de corrélation nulle classique spécial $N(f)$ sur \mathbb{P}^{2n+1} .

3.1.2. Dualité. Soient $U = \mathbb{C}^2$ un espace vectoriel, et $\{x, y\}$ sa base. Il existe un isomorphisme $\nu : U \longrightarrow U^*$ défini à une constante multiplicative près par la matrice antisymétrique

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient que $x^* := {}^T x \nu = -y$, $y^* := {}^T y \nu = x$ est la base de U^* . La forme symplectique \langle, \rangle sur U correspondant à ν est donc défini par

$$\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 0, \quad \langle x, y \rangle = -1.$$

On appelle l'espace $(U; \langle, \rangle)$ le plan symplectique. On en déduit l'isomorphisme $\mathcal{S}^m U \simeq \mathcal{S}^m U^*$ et la forme quadriatique (resp. la forme symplectique) associée, si m est pair (resp. si m est impair), définie par

$$\langle x^i y^{m-i}, x^j y^{m-j} \rangle := \begin{cases} 0 & : i + j \neq m \\ (-1)^{i! \cdot j!} & : i + j = m. \end{cases}$$

qui est une $(m+1) \times (m+1)$ -matrice B_m . Ensuite on en déduit l'isomorphisme $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \simeq \bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U^*$ et la forme quadriatique symétrique associée définie par: soient $0 \leq i < j \leq 2n+1$, $0 \leq s < t \leq 2n+1$, et

$$z_{i,j} = x^i y^{2n+1-i} \wedge x^j y^{2n+1-j}, \quad z_{s,t} = x^s y^{2n+1-s} \wedge x^t y^{2n+1-t}$$

alors on a

$$\langle z_{i,j}, z_{s,t} \rangle := \begin{cases} 0 & : j + s \neq 2n + 1 \text{ ou } i + t \neq 2n + 1 \\ (-1)^{i+j+1} i! \cdot t! \cdot j! \cdot s! & : j + s = 2n + 1 \text{ et } i + t = 2n + 1. \end{cases}$$

Pour toute forme linéaire $f \in (\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U)^*$, on a que l'action de cette forme est

$$f(g) := \langle f, g \rangle$$

où $g \in \bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$. Ensuite on en déduit une forme non dégénérée sur l'espace vectoriel $\bigoplus_{i=0}^m \mathcal{S}^i U$ définie par la matrice

$$B = \text{diag}(B_m, B_{m-1}, B_{m-2}, \dots, B_0).$$

3.1.3. Théorème. *En gardant les notations de la proposition 2.1.3. Soient $U = \mathbb{C}^2$ le plan symplectique et $n > 0$ un entier, et $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)$ l'espace projectif associé à l'espace vectoriel $\mathcal{S}^{2n+1} U$. Pour tout $W \in \mathcal{W}$, comme dans le théorème 3.4 en [1] pour $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)$, il existe une forme antisymétrique symplectique non dégénérée $f := f_W : \bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que*

$${}^T \sigma_1 f \sigma_1 = a f, \text{ et } \langle f, w \rangle = 0 \text{ pour tout } w \in W,$$

où $a \in \mathbb{C}^*$ et $\sigma_1 = \begin{pmatrix} t^\alpha & 0 \\ 0 & t^\beta \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{C}^*$. Il existe aussi D_W un sous-espace vectoriel \mathbb{C}^* -invariant de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$ tel que $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \simeq D_W \oplus W$. Dans ce cas on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow (D_W / \mathbb{C} \cdot f) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0,$$

où $N(f)$ est le fibré de corrélation nulle classique spécial associé à la forme f , et $F(W)$ est le fibré de Tango associé au sous-espace W .

Démonstration. On va utiliser les mêmes notations de 3.3 et 3.4 en [1]. Soit

$$\mathcal{B} := \{z_{p,q} := x^{2n+1-p} y^p \wedge x^{2n+1-q} y^q, \ 0 \leq p < q \leq 2n+1\},$$

la base de l'espace vectoriel $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$. Comme dans la remarque 3.3 en [1] pour $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)$, on a

$$\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \simeq \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^2 E_k,$$

où E_k est engendré par les éléments $z_{p,q}$ tels que $k = p + q$. On pose que

$$\mathbb{E}_k := \begin{cases} E_k \oplus E_{4n+2-k} & : 1 \leq k \leq 2n \\ E_{2n+1} & \end{cases}$$

qui donne

$$\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \simeq \bigoplus_{1 \leq k \leq 2n+1}^2 \mathbb{E}_k.$$

On obtient que $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ pour tout $u_i \in \mathbb{E}_i$ et $u_j \in \mathbb{E}_j$ avec $i \neq j$. Donc si $u, h \in \bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$ on peut les écrire sous la forme

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_{2n} + u_{2n+1}, \quad h = h_1 + h_2 + \dots + h_{2n} + h_{2n+1},$$

où $u_k, h_k \in \mathbb{E}_k$ pour $1 \leq k \leq 2n + 1$. Après la dualité 3.1.2, on obtient que

$$\langle u, h \rangle = \langle u_1, h_1 \rangle + \langle u_2, h_2 \rangle + \langle u_3, h_3 \rangle + \dots + \langle u_{2n}, h_{2n} \rangle + \langle u_{2n+1}, h_{2n+1} \rangle.$$

On cherche une forme linéaire $f \in (\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U)^*$ telle que

$${}^T \sigma_1 f \sigma_1 = a f, \text{ et } f(w) := \langle f, w \rangle = 0$$

pour tout $w \in W$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Ce qui est donc équivalent à dire que l'on cherche une forme linéaire telle que $f \in E_{2n+1}$, et

$$f(w_{2n+1}) := \langle f, w_{2n+1} \rangle = 0$$

pour tout $w_{2n+1} \in W_{2n+1}$. Comme W_{2n+1} est un hyperplan de E_{2n+1} , on a dans ce cas

$$\mathbb{C}.f = W_{2n+1}^\vee,$$

où W_{2n+1}^\vee est l'orthogonal de W_{2n+1} dans E_{2n+1} . Donc f est uniquement déterminée à une constante multiplicative près. On obtient que la forme linéaire f est non dégénérée, car si le coefficient de $z_{p,2n+1-p}$ dans f est nul, pour $0 \leq p \leq n$, alors on a

$$f(z_{p,2n+1-p}) := \langle f, z_{p,2n+1-p} \rangle = 0$$

qui donne $z_{p,2n+1-p} \in W_{2n+1}$; ce qui est une contradiction à $W_{2n+1} \in \mathcal{Z}_{2n+1}$. Comme la forme quadriatique \langle, \rangle est une forme symétrique non dégénérée définie sur $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$ et comme $f \neq 0$, alors on a $f \notin W_{2n+1}$. Pour tout $W \in \mathcal{W}$, on choisit donc $d_k \in E_k \setminus W_k$ non nuls pour tout $1 \leq k \leq 4n + 1$ tel que $\mathbb{C}.d_{2n+1} = W_{2n+1}^\vee$ et on définit $f = a.d_{2n+1}$ où $a \in \mathbb{C}^*$. En considérant le sous-espace vectoriel de $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$

$$D_W = \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1} \mathbb{C}.d_k,$$

on obtient que $\bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U \simeq D_W \oplus W$ est un \mathbb{C}^* -isomorphisme. Si l'hyperplan $H := \ker(f) \subset \bigwedge^2 \mathcal{S}^{2n+1} U$, alors on obtient $W \subset H$. D'après la proposition 3.1.1, on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow H/W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0,$$

ou bien

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow \left(\bigoplus_{\substack{k \neq 2n+1 \\ 1 \leq k \leq 4n+1}} \mathbb{C}.d_k \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0,$$

où $N(f)$ est le fibré de corrélation nulle classique spécial associé à la forme f , et $F(W)$ est le fibré de Tango associé au sous-espace W .

□

3.1.4. Proposition. *En gardant les notations de la proposition 2.1.3. Soit $U = \mathbb{C}^2$ le plan symplectique comme dans la dualité 3.1.2. Soient g_0, \dots, g_{2n+1} des formes homogènes sans un zéro commun sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)$ telles que*

$$\deg(g_i) = \gamma + (2n+1)\alpha + i(\beta - \alpha), \quad i = 0, 1, \dots, 2n+1.$$

Soient $N(f)$ le fibré de corrélation nulle classique spécial sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)$ et $F(W)$ le fibré de Tango sur $\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)$ comme dans le théorème 3.1.3

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow D_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0.$$

où $D_1 := \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathbb{C}.d_k$. Alors on a la suite exacte suivante

$$(6) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \longrightarrow \Upsilon_1 \longrightarrow \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

où $\Upsilon_1 := \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(2\alpha(2n+1) + k(\beta - \alpha))$, et \mathcal{N} (resp. \mathcal{F}) est le fibré défini sur \mathbb{P}^{2n+1} comme dans la proposition 2.1.3 (resp. la Proposition 3.7 en [1]).

Démonstration. D'après la proposition 2.1.2 et le théorème 3.1.3, on obtient que le fibré $N(f)$ est \mathbb{C}^* -invariant par rapport à l'action $\overline{\sigma(t)}$ et

$$\overline{\sigma(t)}^* N(f) \simeq N(f).$$

D'après la proposition 3.2 et le théorème 3.4 en [1], on obtient que l'on obtient que le fibré $F(W)$ est \mathbb{C}^* -invariant par rapport à l'action $\overline{\sigma(t)}$ et

$$\overline{\sigma(t)}^* F(W) \simeq F(W).$$

On considère la transformée de Horrocks **Iminvg**, qui est définie dans la proposition 2.1.3. D'après la définition 2.2 en [1], on obtient **Iminvg**($F(W)$) = $\mathcal{F}_{\gamma, \alpha, \beta}$ et **Iminvg**($N(f)$) = $\mathcal{N}_{\gamma, \alpha, \beta}$. Le fibré $\left(\bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathbb{C}.d_k\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)}$ est muni de l'action canonique $\overline{\sigma(t)}$. Comme on a, pour tout $t \in \mathbb{C}^*$,

$$\sigma(t).(d_k) = t^{((2\alpha(2n+1)+k(\beta-\alpha)+2\gamma))}.(d_k),$$

alors le sous-fibré $(d_k.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)}$ de $\left(\bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathbb{C}.d_k\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)}$ est \mathbb{C}^* -invariant, et on a

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)}^{((2\alpha(2n+1)+k(\beta-\alpha)+2\gamma))} \simeq (d_k.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^n U)}.$$

Ce qui est défini localement, pour tout $v \in \mathcal{S}^{2n+1} U$, par

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)}^{((2\alpha(2n+1)+k(\beta-\alpha)+2\gamma))})_v &\simeq \mathbb{C} \xrightarrow{\simeq} ((d_k.\mathbb{C}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)})_v \simeq d_k.\mathbb{C}. \\ a &\longmapsto ad_k \end{aligned}$$

Donc on a un \mathbb{C}^* -isomorphisme

$$\left(\bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathbb{C}.d_k\right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)} \simeq \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)}^{((2\alpha(2n+1)+k(\beta-\alpha)+2\gamma))}.$$

Donc on obtient

$$\mathbf{Iminvg} \left(\left(\bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathbb{C}.d_k \right) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)} \right) = \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(2\alpha(2n+1) + k(\beta - \alpha) + 2\gamma) := \Upsilon_1(2\gamma),$$

où $\Upsilon_1 := \bigoplus_{1 \leq k \leq 4n+1}^{k \neq 2n+1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(2\alpha(2n+1) + k(\beta - \alpha))$. Nous appliquons la transformée de Horrocks \mathbf{Iminvg} sur la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow N(f)(-1) \longrightarrow D_1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{S}^{2n+1} U)} \longrightarrow F(W)(1) \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \longrightarrow \Upsilon_1 \longrightarrow \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

où $\mathcal{N} := \mathcal{N}_{\alpha, \gamma}(-\gamma)$, $\mathcal{F}(\gamma) := \mathcal{F}_{\alpha, \gamma}(-2\gamma)$.

□

On considère

$$\Upsilon_1 = \bigoplus_{i=1}^{4n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\zeta_i),$$

où

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \alpha(4n+1) + \beta, \zeta_2 = 4n\alpha + 2\beta, \dots, \zeta_{2n} = \alpha(2n+2) + 2n\beta, \zeta_{2n+1} = 2n\alpha + (2n+2)\beta, \\ &\dots, \zeta_{4n} = \alpha + (4n+1)\beta. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4n} \zeta_i &= c_1(\mathcal{N}(-\gamma)) + c_1(\mathcal{F}(\gamma)) = c_1(\mathcal{N}) + c_1(\mathcal{F}) \\ &= n(2n+1)(\beta + \alpha) + 3n(2n+1)(\beta + \alpha) = 4n(2n+1)(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

et

$$\zeta_i + \zeta_{4n+1-i} = 2(2n+1)(\alpha + \beta).$$

3.1.5. Proposition. *Nous gardons les mêmes notations de la proposition 3.1.4. Pour la suite exacte suivante*

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \xrightarrow{\pi} \Upsilon_1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

il existe deux morphismes ϕ et ψ tels que le diagramme suivant est commutatif et exacte en Υ_1

$$\begin{array}{ccccc} \Upsilon_1^*(-\hbar_1) & \xrightarrow{\phi} & \Upsilon_1 & \xrightarrow{\psi} & \bigwedge^{2n-1} \Upsilon_1^*(\hbar_2) \\ & \searrow & \uparrow \pi & \searrow \iota & \nearrow \\ & & \mathcal{N}(-\gamma) & & \mathcal{F}(\gamma) \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ 0 & & 0 & & 0, \end{array}$$

où $\hbar_1 = 2\gamma - (2n+1)(\alpha + \beta)$ et $\hbar_2 = 2n\gamma + 3n(2n+1)(\alpha + \beta)$. De plus, si

$$\gamma > \max\{|\alpha + \beta(4n+1)| + (2n+1)(\alpha + \beta), \alpha(4n+1) + \beta\},$$

alors les deux morphismes ϕ et ψ sont des matrices de rang $2n$ et $\hbar_1 > 0$.

Démonstration. On considère

$$\mathcal{B}_1 = \{e_1 = d_1, e_2 = d_2, \dots, e_{2n} = d_{2n}, e_{2n+1} = d_{2n+2}, e_{2n+2} = d_{2n+3}, \dots, e_{4n} = d_{4n+1}\}$$

la base canonique de l'espace vectoriel D_1 , et $\mathcal{B}_1^* = \{e_i^*\}_{1 \leq i \leq 4n}$ la base canonique de l'espace vectoriel dual D_1^* . On considère aussi que

$$\bigwedge^{2n-1} (\mathcal{B})^* = \{e_{l_1}^* \wedge e_{l_2}^* \wedge \dots \wedge e_{l_{2n-1}}^* | 1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_{2n-1} \leq 4n\},$$

est la base canonique de l'espace vectoriel $\bigwedge^{2n-1} D_1^*$. D'après la proposition 3.1.4 et que le fibré \mathcal{N} est symplectique comme dans la proposition 2.1.4; le morphisme injectif $\pi : \mathcal{N}(-\gamma) \rightarrow \Upsilon_1$ donne

$$\Upsilon_1^* \xrightarrow{T\pi} \mathcal{N}^*(\gamma) \simeq \mathcal{N}(\gamma - (2n+1)(\alpha + \beta)) \rightarrow 0.$$

Alors on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon_1^*(-\hbar_1) & \xrightarrow{\phi} & \Upsilon_1 \\ & \searrow T\pi(-\hbar_1) & \nearrow \pi \\ & \mathcal{N}(-\gamma) & \\ 0 & \nearrow & \searrow 0, \end{array}$$

où $\hbar_1 = 2\gamma - (2n+1)(\alpha + \beta)$. D'après la proposition 3.1.4, le morphisme surjectif $\iota : \Upsilon_1 \rightarrow \mathcal{F}(\gamma)$ donne le morphisme injectif suivant

$$\bigwedge^{2n-1} T\iota : \bigwedge^{2n-1} (\mathcal{F}(\gamma))^* \rightarrow \bigwedge^{2n-1} \Upsilon_1^*.$$

Comme $c_1(\mathcal{F}(\gamma)) = 2n\gamma + 3n(2n+1)(\alpha + \beta) = \hbar_2$ et $\bigwedge^{2n-1} ((\mathcal{F}(\gamma))^*) \otimes \bigwedge^{2n} (\mathcal{F}(\gamma)) = \mathcal{F}(\gamma)$, alors on obtient le morphisme injectif

$$\left(\bigwedge^{2n-1} T\iota \right) (\hbar_2) : \mathcal{F}(\gamma) \rightarrow \left(\bigwedge^{2n-1} \Upsilon_1^* \right) (\hbar_2).$$

Donc on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon_1 & \xrightarrow{\psi} & \left(\bigwedge^{2n-1} \Upsilon_1^* \right) (\hbar_2) \\ & \searrow \iota & \nearrow \left(\bigwedge^{2n-1} T\iota \right) (\hbar_2) \\ & \mathcal{F}(\gamma) & \\ 0 & \nearrow & \searrow 0. \end{array}$$

Comme on a

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \xrightarrow{\pi} \Upsilon_1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

alors on obtient $\psi \cdot \phi = 0$ et que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Upsilon_1^*(-\hbar_1) & \xrightarrow{\phi} & \Upsilon_1 & \xrightarrow{\psi} & \bigwedge^{2n-1} \Upsilon_1^*(\hbar_2) \\ & \searrow T\pi(-\hbar_1) & \nearrow \pi & \searrow \iota & \nearrow (\bigwedge^{2n-1} T\iota)(\hbar_2) \\ & \mathcal{N}(-\gamma) & & \mathcal{F}(\gamma) & \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ 0 & & 0 & & 0. \end{array}$$

Si

$$\gamma > \max\{|\alpha + \beta(4n + 1)| + (2n + 1)(\alpha + \beta), \alpha(4n + 1) + \beta\},$$

alors on peut définir le morphisme

$$\Upsilon_1^* \xrightarrow{T\pi} \mathcal{N}(\gamma - (2n + 1)(\alpha + \beta)) \longrightarrow 0,$$

par une ligne $[S_1, S_2, \dots, S_{4n}] \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}}$ où $S_i \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma + \zeta_i - (2n + 1)(\alpha + \beta)))$ sont des sections du fibré $\mathcal{N}(\gamma + \zeta_i - (2n + 1)(\alpha + \beta))$ pour $i = 1, \dots, 4n$. Dans ce cas, on peut définir ϕ par

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & S_{1,2} & \cdots & & S_{1,4n} \\ -S_{1,2} & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & S_{4n-1,4n} \\ -S_{1,4n} & \cdots & & -S_{4n-1,4n} & 0 \end{pmatrix} = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4n} S_{i,j} \cdot e_i \wedge e_j$$

qui est une $(4n \times 4n)$ -matrice antisymétrique de rang $2n$ définie relativement aux bases \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_1^* , et $S_{i,j} := S_i \wedge S_j \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\zeta_i + \zeta_j + \hbar_1 - (2n + 1)(\alpha + \beta)))$ pour $1 \leq i < j \leq 4n$. On peut définir aussi le morphisme

$$\iota : \Upsilon_1 \longrightarrow \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

par une ligne $[q_1, q_2, \dots, q_{4n}] \otimes I_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}}$ où $q_i \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(\gamma - \zeta_i))$ sont des sections du fibré $\mathcal{F}(\gamma - \zeta_i)$ pour $i = 1, \dots, 4n$. Dans ce cas, on peut définir ψ par

$$\psi = \begin{pmatrix} U_{1,1} & \cdots & U_{1,4n} \\ U_{2,1} & \cdots & U_{2,4n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ U \binom{4n}{2n-1},_1 & \cdots & U \binom{4n}{2n-1},_{4n} \end{pmatrix}$$

qui est une $\left(\binom{4n}{2n-1} \times 4n\right)$ -matrice de rang $2n$ définie relativement aux bases \mathcal{B}_1 et $\bigwedge^{2n-1} \mathcal{B}_1^*$, et $U_{l,j} \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(2n\gamma - \zeta_{l_1} - \zeta_{l_2} - \cdots - \zeta_{l_{2n-1}} - \zeta_j))$ pour tout $1 \leq l \leq \binom{4n}{2n-1}$, $1 \leq l_1 < \cdots < l_{2n-1} \leq 4n$ et $1 \leq j \leq 4n$. On a

$$\psi = \sum_{\substack{1 \leq j \leq 4n \\ 1 \leq l_1 \neq \dots \neq l_{2n-1} \leq 4n}} q_{l_1, \dots, l_{2n-1}, j} \cdot e_{l_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{l_{2n-1}}^* \wedge e_j^*,$$

où $U_{l,j} := q_{l_1, \dots, l_{2n-1}, j} := q_{l_1} \wedge \cdots \wedge q_{l_{2n-1}} \wedge q_j \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+1}}(2n\gamma - \zeta_{l_1} - \zeta_{l_2} - \cdots - \zeta_{l_{2n-1}} - \zeta_j))$.

Nous allons décrire les entrées de la matrice ψ par rapport aux entrées de la matrice ϕ et la construction de la matrice ψ telle que $\psi \cdot \phi = 0$. Comme la matrice ϕ est antisymétrique, alors on a

$$rg(\phi) = 2n \text{ donne } Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}) = 0, \text{ pour tout } 1 \leq l_1 < \cdots < l_{2n-2} \leq 4n,$$

où $Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})})$ est le pfaffien de la $((2n+2) \times (2n+2))$ -sous-matrice antisymétrique $\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}$ de ϕ qui est obtenue de ϕ par une élimination des colonnes et des lignes de numéro l_1, \dots et l_{2n-2} (simplement le $(2n+2)$ -pfaffien de ϕ).

Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, 4n\} \setminus \{l_1, \dots, l_{2n-2}\}$, on a

$$Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ j_k \in \{1, 2, \dots, 4n\} \setminus \{i, l_1, \dots, l_{2n-2}\}}} (-1)^k S_{i, j_k} \cdot Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, i, j_k)}) = 0,$$

où $Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, i, j_k)})$ est le pfaffien de la $(2n \times 2n)$ -sous-matrice antisymétrique $\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, i, j_k)}$ de $\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}$ (resp. de ϕ) qui est obtenue de $\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}$ (resp. de ϕ) par une élimination des colonnes et des lignes de numéro i, j_k (resp. l_1, \dots, l_{2n-2}, i et j_k).

Par la définition de ψ , pour une ligne de la matrice ψ , il y a $2n - 1$ entrées qui sont nulles, et on peut écrire cette matrice sous la forme suivante

$$\psi = \begin{pmatrix} \eta_{2n+2} \\ \eta_{2n+1} \\ \vdots \\ \eta_4 \end{pmatrix},$$

où chaque η_r , pour $4 \leq r \leq 2n + 2$, est une $(h_r \times 4n)$ -sous-matrice de ψ telle que

$$\sum_{r=4}^{2n+2} h_r = \begin{pmatrix} 4n \\ 2n - 1 \end{pmatrix},$$

et chaque η_r contient des $(r \times 4n)$ -sous-matrices qui sont composées d'une $(r \times r)$ -sous-matrice antisymétrique et de $2n - 2$ colonnes nulles et de $2n + 2 - r$ colonnes. Soit $\mathcal{A}(r, q)$ une $(r \times 4n)$ -sous-matrice de la $(h_r \times 4n)$ -matrice η_r pour $4 \leq r \leq 2n + 2$ et pour $q \geq 1$

$$\mathcal{A}(r, q) = (0 \mid 0 \mid \theta(r, q, m_1) \mid 0 \mid \theta(r, q, m_2) \mid \cdots \mid 0 \mid \mathcal{X}(r, q) \mid 0 \mid \theta(r, q, m_{2n+2-r}) \mid \cdots \mid 0),$$

où $\mathcal{X}(r, q)$ est une $(r \times r)$ -sous-matrice antisymétrique dont les colonnes sont de numéro $1 \leq w_1 < w_2 < \dots < w_r \leq 4n$, et $\theta(r, q, m_1), \dots, \theta(r, q, m_{2n+2-r})$ sont des colonnes de numéro $1 \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{2n+2-r} \leq 4n$, et le reste des colonnes sont des $2n - 2$ colonnes nulles de numéro $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_{2n-2} \leq 4n$ avec w_1, w_2, \dots, w_r et $m_1, m_2, \dots, m_{2n+2-r}$ et $l_1, l_2, \dots, l_{2n-2}$ sont des numéros différents. On considère $\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}$ la $((2n + 2) \times (2n + 2))$ -sous-matrice antisymétrique de ϕ qui est obtenue de ϕ par une élimination des colonnes et des lignes de numéro l_1, \dots et l_{2n-2} , et $Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})})$ est son pfaffien. Pour w_1 , on a

$$Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ j_k \in \{1, 2, \dots, 4n\} \setminus \{w_1, l_1, \dots, l_{2n-2}\}}} (-1)^k S_{w_1, j_k} Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_1, j_k)}) = 0,$$

et on considère $(-1)^k Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_1, j_k)})$ comme les entrées de la première ligne de $\mathcal{A}(r, q)$ à l'exception de $2n - 1$ entrées qui sont déjà nulles, pour tout $1 \leq k \leq 2n + 1$. Pour w_2 , on a

$$Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ j_k \in \{1, 2, \dots, 4n\} \setminus \{w_2, l_1, \dots, l_{2n-2}\}}} (-1)^k S_{w_2, j_k} Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_2, j_k)}) = 0,$$

et on considère $Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_2, j_1)})$ et $(-1)^k Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_2, j_k)})$ comme les entrées de la deuxième ligne de $\mathcal{A}(r, q)$ à l'exception de $2n - 1$ entrées qui sont déjà nulles, pour tout $2 \leq k \leq 2n + 1$. Pour w_3 , on a

$$Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ j_k \in \{1, 2, \dots, 4n\} \setminus \{w_3, l_1, \dots, l_{2n-2}\}}} (-1)^k S_{w_3, j_k} Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_3, j_k)}) = 0,$$

et on considère $Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_3, j_1)})$ et $-Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_3, j_2)})$ et $(-1)^k Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_3, j_k)})$ comme les entrées de la deuxième ligne de $\mathcal{A}(r, q)$ à l'exception de $2n - 1$ entrées qui sont

déjà nulles, pour tout $3 \leq k \leq 2n+1$. Pour w_4 , on a

$$Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ j_k \in \{1, 2, \dots, 4n\} \setminus \{w_4, l_1, \dots, l_{2n-2}\}}} (-1)^k S_{w_4, j_k} Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_4, j_k)}) = 0,$$

et on considère $Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_4, j_1)})$ et $-Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_4, j_2)})$ et $Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_4, j_2)})$ et $(-1)^k Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_3, j_k)})$ comme les entrées de la deuxième ligne de $\mathcal{A}(r, q)$ à l'exception de $2n-1$ entrées qui sont déjà nulles, pour tout $4 \leq k \leq 2n+1$. On continue comme ça jusqu'à w_r , on a

$$Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ j_k \in \{1, 2, \dots, 4n\} \setminus \{w_r, l_1, \dots, l_{2n-2}\}}} (-1)^k S_{w_r, j_k} Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_r, j_k)}) = 0,$$

et on considère $(-1)^{k+1} Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_r, j_k)})$ comme les entrées de la $r^{\text{ème}}$ -ligne de $\mathcal{A}(r, q)$ à l'exception de $2n-1$ entrées qui sont déjà nulles, pour tout $1 \leq k \leq 2n+1$. Donc on obtient que

$$\mathcal{A}(r, q) \cdot \varsigma_v(\phi) = 0,$$

où $\varsigma_v(\phi)$ est une colonne du numéro v de ϕ , pour tout $v \in \{w_1, w_2, \dots, w_r; m_1, m_2, \dots, m_{2n+2-r}\}$.

Pour la colonne l_1 de ϕ , on a

$$Pf(\phi_{(l_2, \dots, l_{2n-2}, w_1)}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ j_k \in \{1, 2, \dots, 4n\} \setminus \{w_1, l_2, \dots, l_{2n-2}\}}} (-1)^k S_{l_1, j_k} Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_1, j_k)}) = 0,$$

et

$$Pf(\phi_{(l_2, \dots, l_{2n-2}, w_2)}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ j_k \in \{1, 2, \dots, 4n\} \setminus \{w_2, l_1, l_2, \dots, l_{2n-2}\}}} (-1)^k S_{l_1, j_k} Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_2, j_k)}) = 0.$$

On continue comme ça jusqu'à w_r

$$Pf(\phi_{(l_2, \dots, l_{2n-2}, w_r)}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq 2n+1 \\ j_k \in \{1, 2, \dots, 4n\} \setminus \{w_r, l_1, l_2, \dots, l_{2n-2}\}}} (-1)^k S_{l_1, j_k} Pf(\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2}, w_r, j_k)}) = 0.$$

On a la même chose pour toutes les colonnes l_i de ϕ pour $2 \leq i \leq 2n-2$. Donc on obtient que

$$\mathcal{A}(r, q) \cdot \phi = 0,$$

et une matrice ψ dont ses entrées sont les $2n$ -pfaffiens de ϕ et telle que $\psi \cdot \phi = 0$.

□

3.1.6. Remarque. En gardant les mêmes notations de la proposition 3.1.5, on a

- Dans la sous-matrice $\mathcal{A}(r, q)$, chaque ligne de numéro w_i , $1 \leq i \leq r$, contient toutes les entrées de ϕ sauf les entrées des lignes de numéro w_i, l_1, \dots et l_{2n-2} . Deux lignes quelconques de $\mathcal{A}(r, q)$ contiennent toutes les entrées de la matrice $\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}$.

- Dans la sous-matrice antisymétrique $\mathcal{X}(r, q)$, chaque colonne de numéro w_i , $1 \leq i \leq r$, contient toutes les entrées de ϕ sauf les entrées des colonnes de numéro w_i, l_1, \dots et l_{2n-2} . Deux colonnes quelconques de $\mathcal{X}(r, q)$ contiennent toutes les entrées de la matrice $\phi_{(l_1, \dots, l_{2n-2})}$. Chaque colonne de ψ est composé des colonnes de toutes les matrices $\mathcal{A}(r, q)$: soit une colonne nulle ou bien une colonne de la sous-matrice antisymétrique $\mathcal{X}(r, q)$ ou bien une colonne comme $\theta(r, q)$. Donc chaque colonne de la matrice ψ contient toutes les entrées de la matrice ϕ .

- D'après la définition de ψ et la base de l'espace vectoriel $\bigwedge^{2n-1} D_1^*$

$$\bigwedge^{2n-1} (\mathcal{B})^* = \{e_{l_1}^* \wedge e_{l_2}^* \wedge \dots \wedge e_{l_{2n-1}}^* \mid 1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_{2n-1} \leq 4n\},$$

on obtient qu'il existe une ligne de ψ telle que:

Soient $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_{2n-1} \leq 4n$ les numéros des entrées nulles dans cette ligne. Tous les $2n-2$ numéros des entrées nulles de cette ligne vérifient $4n+1-l_i = l_l$ avec $1 \leq i \neq l \leq 2n-1$.

Pour $1 \leq a \leq 4n$ un numéro d'une entrée nulle, on a $\binom{2n}{n-1} - 1$ lignes comme la ligne précédente.

- Comme $rg(\phi) = 2n$, alors les a -mineurs de la matrice ϕ n'ont pas un zéro commun sur \mathbb{P}^{2n+1} où $1 \leq a \leq 2n$, en particulier les entrées $S_{i,j}$ n'ont pas un zéro commun sur \mathbb{P}^{2n+1} .

- On donne ici un exemple de la sous-matrice η_r

$$\eta_{2n+2} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}(2n+2, 1) \\ \mathcal{A}(2n+2, 2) \\ \vdots \\ \mathcal{A}(2n+2, n) \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{A}(2n+2, q)$ est une $((2n+2) \times 4n)$ -sous-matrice de la $(n(2n+2) \times 4n)$ -matrice η_{2n+2} . On a, pour $1 \leq q \leq n$,

$$\mathcal{A}(2n+2, q) = \overbrace{[0|0|0|0|0|\dots|0]}^{2(n-q) \text{ colonnes}} \mid \mathcal{X}(2n+2, q) \mid \overbrace{[0|0|0|0]}^{2(q-1) \text{ colonnes}}$$

où $\mathcal{X}(2n+2, q)$ est une $((2n+2) \times (2n+2))$ -sous-matrice antisymétrique dont ses entrées sont définies comme dans 3.1.5.

3.1.7. Remarque. Soient $z \in H^0(\mathbb{P}^{2n+2}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+2}}(1)) \setminus \{0\}$ et $\mathbb{P}^{2n+1} \subset \mathbb{P}^{2n+2}$ l'hyperplan de \mathbb{P}^{2n+2} défini par l'équation $z = 0$. Soient $\epsilon \geq 1$ un entier et $Y_{(\epsilon)} \subset \mathbb{P}^{2n+2}$ le voisinage infinitésimal de l'ordre ϵ de \mathbb{P}^{2n+1} dans \mathbb{P}^{2n+2} , défini par l'équation $z^\epsilon = 0$. On a les morphismes d'inclusion suivants

$$\mathbb{P}^{2n+1} := Y_{(1)} \xrightarrow{b_{(2)}} Y_{(2)} \xrightarrow{b_{(3)}} \dots \xrightarrow{b_{(\epsilon)}} Y_{(\epsilon)} \xrightarrow{d} \mathbb{P}^{2n+2}.$$

Soit $e_0 \in \mathbb{P}^{2n+2} \setminus Y_{(\epsilon)}$, on définit la projection d'un point (voir [5] page 22) sur un sous-espace projectif \mathbb{P}^{2n+1} par

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{P}^{2n+2} \setminus \{e_0\} &\longrightarrow \mathbb{P}^{2n+1} \\ e &\longmapsto \pi(e) \end{aligned}$$

où $\pi(e)$ est l'intersection de \mathbb{P}^{2n+1} avec la droite unique passant par les points e_0 et e . On considère la restriction de la projection π sur le voisinage infinitésimal $Y_{(\epsilon)}$ et on obtient la projection d'un point sur un sous-espace projectif \mathbb{P}^{2n+1}

$$J_{(\epsilon)} : Y_{(\epsilon)} \longrightarrow \mathbb{P}^{2n+1}.$$

On considère $\mathcal{N}_{(\epsilon)} = J_{(\epsilon)}^* \mathcal{N}$ et $\mathcal{F}_{(\epsilon)} = J_{(\epsilon)}^* \mathcal{F}$ où \mathcal{N} est le fibré de 0-corrélation pondéré provenant d'une image inverse généralisée sur \mathbb{P}^{2n+1} , et \mathcal{F} est le fibré de Tango pondéré provenant d'une image inverse généralisée sur \mathbb{P}^{2n+1} comme dans la proposition 3.1.4. En prenant l'image inverse de la suite exacte suivant

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(-\gamma) \xrightarrow{\pi} \Upsilon_1 \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}(\gamma) \longrightarrow 0,$$

on obtient donc la suite exacte suivante

$$(7) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{N}_{(\epsilon)}(-\gamma) \xrightarrow{\pi} \Upsilon_{(\epsilon)} \xrightarrow{\iota} \mathcal{F}_{(\epsilon)}(\gamma) \longrightarrow 0.$$

où

$$\Upsilon_{(\epsilon)} := J_{(\epsilon)}^* \Upsilon_1 = \bigoplus_{i=1}^{4n} \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(\zeta_i).$$

On a aussi les deux suites exactes suivantes sur $Y_{(\epsilon)}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{(\epsilon-1)}(-1) \longrightarrow \mathcal{F}_{(\epsilon)} \longrightarrow \mathcal{F}_{(1)} \longrightarrow 0,$$

et

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_{(\epsilon-1)}(-1) \longrightarrow \mathcal{N}_{(\epsilon)} \longrightarrow \mathcal{N}_{(1)} \longrightarrow 0.$$

3.1.8. Théorème. *Nous gardons les mêmes notations de la proposition 3.1.5. Soit n un entier positif tel que $n > 1$. Soient $\mathcal{N}_{(\epsilon)}$ et $\mathcal{F}_{(\epsilon)}$ comme dans la remarque 3.1.7 et \mathcal{G} un fibré vectoriel sur \mathbb{P}^{2n+2} défini par le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
& \Upsilon(-\epsilon) & \xlongequal{\quad} & \Upsilon(-\epsilon) & & & \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \Upsilon & \longrightarrow & \mathcal{F}_{(\epsilon)}(\gamma) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{N}_{(\epsilon)}(-\gamma) & \xrightarrow{\pi} & \Upsilon_{(\epsilon)} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{F}_{(\epsilon)}(\gamma) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où

$$\Upsilon := \bigoplus_{j=1}^{4n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+2}}(\zeta_j).$$

Soit $\Gamma := \bigoplus_{i=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+2}}(\zeta_{b_i})$ avec $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{2n-1} \leq 4n$. On a

1 - Si $\epsilon = \epsilon_1 := 2\gamma + (2n+1)(\alpha + \beta)$, alors il existe un fibré vectoriel \mathcal{E} de rang $2n+1$ sur \mathbb{P}^{2n+2} qui est défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \Gamma(-\epsilon_1) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

2 - Si $\epsilon = \epsilon_2 := 2n\gamma + n(2n+1)(\alpha + \beta)$, alors il existe un fibré vectoriel \mathcal{K} de rang $2n+1$ sur \mathbb{P}^{2n+2} qui est défini par la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 0.$$

Parmi ces fibrés Il y a des fibrés qui sont différents du fibré de Tango pondéré provenant d'une image inverse généralisée sur \mathbb{P}^{2n+2} [1].

Démonstration. De la proposition 3.1.5, on a le diagramme commutatif sur \mathbb{P}^{2n+1} suivant

$$\begin{array}{ccccc}
\Upsilon_1^*(-\hbar_1) & \xrightarrow{\phi} & \Upsilon_1 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{L}_1(\hbar_2) \\
& \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
& & \mathcal{N}(-\gamma) & & \mathcal{F}(\gamma) \\
& \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
0 & & 0 & & 0,
\end{array}$$

où $\mathcal{L}_1 := (\bigwedge^{2n-1} \Upsilon_1^*)$. En prenant l'image inverse du diagramme précédent par la projection d'un point sur un sous-espace projectif \mathbb{P}^{2n+1} , la remarque 3.1.7 ,

$$J_{(\epsilon)} : Y_{(\epsilon)} \longrightarrow \mathbb{P}^{2n+1},$$

on obtient le diagramme suivant sur $Y_{(\epsilon)}$

$$\begin{array}{ccccc}
 \Upsilon_{(\epsilon)}^*(-\hbar_1) & \xrightarrow{\phi} & \Upsilon_{(\epsilon)} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{L}_{(\epsilon)}(\hbar_2) \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 & \mathcal{N}_{(\epsilon)}(-\gamma) & & \mathcal{F}_{(\epsilon)}(\gamma) & \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

où $\Upsilon_{(\epsilon)} := \bigoplus_{i=1}^{4n} \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(\zeta_i)$. En choisissant les mêmes notations de 2.2 avec $\Phi = \phi$ et $\Psi = \psi$ sur \mathbb{P}^{2n+2} , tous les fibrés $\Upsilon_{(\epsilon)}^*(-\hbar_1)$, $\Upsilon_{(\epsilon)}$ et $\mathcal{L}_{(\epsilon)}(\hbar_2)$ peuvent se relever en fibrés $\Upsilon^*(-\hbar_1)$, Υ et $\mathcal{L}(\hbar_2)$ respectivement sur \mathbb{P}^{2n+2} . On obtient donc le complexe suivant sur \mathbb{P}^{2n+2}

$$\Upsilon^*(-\hbar_1) \xrightarrow{\Phi} \Upsilon \xrightarrow{\Psi} \mathcal{L}(\hbar_2),$$

où $\Psi \cdot \Phi = \psi \cdot \phi = 0$. Alors on peut définir le morphisme suivant sur \mathbb{P}^{2n+2}

$$\begin{aligned}
 \Delta : \Upsilon(-\epsilon) \oplus \Upsilon^*(-\hbar_1) &\longrightarrow \Upsilon \oplus \mathcal{L}(\hbar_2 - \epsilon) \\
 \Delta &= \left(\begin{array}{c|c} z^\epsilon I & \Phi \\ \hline \Psi & 0 \end{array} \right),
 \end{aligned}$$

qui est la $((4n + \binom{4n}{2n-1}) \times 8n)$ -matrice suivante

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc}
 z^\epsilon & & & 0 & S_{1,2} & \cdots & \cdots & S_{1,4n} \\
 & z^\epsilon & & -S_{1,2} & 0 & & & \vdots \\
 & & \ddots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
 & & & \vdots & & & 0 & S_{4n-1,4n} \\
 0 & & z^\epsilon & -S_{1,4n} & \cdots & \cdots & -S_{4n-1,4n} & 0 \\
 \hline
 U_{1,1} & \cdots & U_{1,4n} & & & & & \\
 U_{2,1} & \cdots & U_{2,4n} & & & & & \\
 \vdots & \cdots & \vdots & & & & & \\
 U \binom{4n}{2n-1}, 1 & \cdots & U \binom{4n}{2n-1}, 4n & & & & & \\
 \hline
 & & & 0 & & & &
 \end{array} \right).$$

Soient

$$\Gamma := \bigoplus_{i=1}^{2n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+2}}(\zeta_{b_i}) \text{ avec } 1 \leq b_1 < b_2 < \cdots < b_{2n-1} \leq 4n.$$

1- On considère $\overline{\mu_{b_i}}$ la somme de la $b_i^{\text{ème}}$ -colonne de la matrice Δ avec la $(8n+1-b_i)^{\text{ème}}$ -colonne de la matrice Δ . Plus précisément, soit

$$(h_1, \dots, h_{4n}, h_{4n+1}, \dots, h_{8n}) \in \left(\bigoplus_{j=1}^{4n} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+2}}(\zeta_j - \epsilon)) \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{4n} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2n+2}}(-\zeta_j - \hbar_1)) \right).$$

- On considère $\overline{\mu_{b_i}}$ la somme la $b_i^{\text{ème}}$ -colonne et la $(8n + 1 - b_i)^{\text{ème}}$ -colonne de la matrice Δ avec la condition d'homogénéité suivante, sur la $b_i^{\text{ème}}$ -coordonnée et la $(8n + 1 - b_i)^{\text{ème}}$ -coordonnée de $(h_1, \dots, h_{4n}, h_{4n+1}, \dots, h_{8n})$,

$$\begin{aligned} \deg(h_{b_i}) &= \deg(h_{8n+1-b_i}) \\ -\epsilon + \zeta_{b_i} &= -\zeta_{4n+1-b_i} - \hbar_1, \end{aligned}$$

où $1 \leq i \leq 2n - 1$. Donc, pour tout $1 \leq i \leq 2n - 1$, de telles sommes existent grâce à la condition $\epsilon = \epsilon_1 := 2\gamma + (2n + 1)(\alpha + \beta)$ et au fait que $\zeta_j = -\zeta_{4n+1-j} + 2(2n + 1)(\alpha + \beta)$ pour tout $1 \leq j \leq 4n$. Donc on obtient la matrice

$$\begin{aligned} \overline{\mu} &= \left(\overline{\mu_{b_1}} \quad , \quad \overline{\mu_{b_2}} \quad , \quad \dots \quad , \quad \overline{\mu_{b_{2n-1}}} \right), \\ \overline{\mu} : \Gamma(-\epsilon_1) &\longrightarrow \Upsilon \oplus \mathcal{L}(\hbar_2 - \epsilon_1). \end{aligned}$$

qui est une $((4n + \binom{4n}{2n-1}) \times (2n - 1))$ -matrice.

D'après la proposition 3.1.5 et la remarque 3.1.6, on a: p un mineur maximal de $\overline{\mu}$ est une forme homogène qui est une somme des termes de la forme

$$\prod_{i,j} S_{i,j}^{a_{i,j}} \cdot z^{\epsilon_1 b} : a_{i,j}, b \in \mathbb{N} \text{ tels que } \epsilon_1 b + \sum_{i,j} a_{i,j} \deg(S_{i,j}) = \deg(p).$$

Donc le mineur maximal p est une somme des termes de la forme

$$X_0^{r_0} \cdot X_1^{r_1} \cdot \dots \cdot X_{2n+1}^{r_{2n+1}} \cdot z^{\epsilon_1 b} : r_0, \dots, r_{2n+1}, b \in \mathbb{N} \text{ tels que } r_0 + \dots + r_{2n+1} + \epsilon_1 b = \deg(p).$$

Soient $\overline{\Xi}$ l'idéal des mineurs maximaux de $\overline{\mu}$ qui est engendré par tous les mineurs maximaux de $\overline{\mu}$, et $\mathcal{M} = (X_0, X_1, \dots, X_{2n+1}, z)$ un idéal maximal sur \mathbb{P}^{2n+2} , et $\overline{m} := \max\{\deg(p) : p \in \overline{\Xi}\}$. Alors $\mathcal{M}^{\overline{m}} \subset \overline{\Xi}$ où $\mathcal{M}^{\overline{m}}$ est un exposant de \mathcal{M} . Donc $\overline{\Xi}$ est \mathcal{M} -primaire sur \mathbb{P}^{2n+2} , d'après la définition de l'idéal primaire. On a aussi $\overline{\Xi} \neq 0$ sur \mathbb{P}^{2n+2} . Donc l'idéal annulateur de $\overline{\Xi}$ est $\text{Ann}(\overline{\Xi}) = 0$ sur \mathbb{P}^{2n+2} . Ce qui entraîne que le morphisme $\overline{\mu}$ est un morphisme injectif non nul sur \mathbb{P}^{2n+2} . D'après la proposition 2.2.2 et la remarque 2.2.3, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & \Gamma(-\epsilon_1) & & \\ & \swarrow \overline{\kappa} & \downarrow & \searrow \overline{\mu} & \\ \Upsilon(-\epsilon_1) \oplus \Upsilon^*(-\hbar_1) & \xrightarrow{\Delta} & \Upsilon \oplus \mathcal{L}(\hbar_2 - \epsilon_1) & & \\ & \searrow & \downarrow \gamma & \swarrow & \\ & & \mathcal{G} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

où $\overline{\mathfrak{N}} : \Gamma(-\epsilon_1) \hookrightarrow \Upsilon(-\epsilon_1) \oplus \Upsilon^*(-\hbar_1)$ est un morphisme d'inclusion, alors le morphisme suivant est représenté par le morphisme $\overline{\mu}$

$$\Gamma(-\epsilon_1) \longrightarrow \mathcal{G}.$$

Alors on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \Gamma(-\epsilon_1) \xrightarrow{\overline{\mu}} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0,$$

où \mathcal{E} est un fibré vectoriel de rang $2n+1$ sur \mathbb{P}^{2n+2} . On utilise la proposition 2.2.8 pour calculer les classes de Chern du faisceau $\mathcal{F}_{(\epsilon_1)}(\gamma)$. En utilisant la suite exacte précédente et la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \Upsilon \longrightarrow \mathcal{F}_{(\epsilon_1)}(\gamma) \longrightarrow 0$$

on obtient que la première classe de Chern du fibré \mathcal{G} est $c_1(\mathcal{G}) = -4n\gamma$, et la première classe de Chern du fibré \mathcal{E} est

$$c_1(\mathcal{E}) = (4n^2 - 1)(\alpha + \beta) - 2\gamma - \sum_{i=1}^{2n-1} \zeta_{b_i}.$$

2- Maintenant, pour le fibré \mathcal{K} . D'après la remarque 3.1.6, il existe une ligne de la matrice Ψ telle que:

Soient $1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_{2n-1} \leq 4n$ les numéros des entrées nulles dans cette ligne. Tous les $2n-2$ numéros des entrées nulles de cette ligne vérifient $4n+1-l_r = l_l$ avec $1 \leq r \neq a \leq 2n-1$.

Pour une ligne de la matrice Δ de numéro exactement plus grand que $4n$, on va appeler la partie de cette ligne dans la sous-matrice Ψ une sous-ligne de cette ligne dans la sous-matrice Ψ (simplement sa sous-ligne dans Ψ).

- On choisit une ligne de la matrice Δ telle que sa sous-ligne dans Ψ possède un zéro de numéro $4n+1-b_1$. Soient $1 \leq l_1(1) < l_2(1) < \dots < l_{2n-2}(1) \leq 4n$ les numéros des entrées nulles de cette sous-ligne dans Ψ , tels qu'ils vérifient $4n+1-l_r(1) = l_a(1)$ avec $1 \leq r \neq a \leq 2n-2$. Donc cette ligne contient la forme z^ϵ et toutes les entrées de Φ sauf les entrées des colonnes de numéro $4n+1-b_1, l_1(1), \dots$ et $l_{2n-2}(1)$.

On considère μ_{b_1} la somme de cette ligne avec la $b_1^{\text{ème}}$ -ligne de la matrice Δ avec la condition d'homogénéité suivante

$$\zeta_{b_1} = -\zeta_{4n+1-b_1} - 2(n-1)(2n+1)(\alpha + \beta) - \epsilon + \hbar_2.$$

Une telle somme existe grâce à la condition $\epsilon = \epsilon_2 := 2n\gamma + n(2n+1)(\alpha + \beta)$ et au fait que $\zeta_j = -\zeta_{4n+1-j} + 2(2n+1)(\alpha + \beta)$ pour tout $1 \leq j \leq 4n$.

- On choisit maintenant une autre ligne de la matrice Δ telle que sa sous-ligne dans Ψ possède un zéro de numéro $4n+1-b_2$. Soient $1 \leq l_1(2) < l_2(2) < \dots < l_{2n-2}(2) \leq 4n$ les numéros des entrées nulles de cette sous-ligne dans Ψ , tels qu'ils vérifient $4n+1-l_r(2) = l_l(2)$ avec $1 \leq r \neq a \leq 2n-2$ et $l_1(2), l_2(2), \dots, l_{2n-2}(2)$ sont différents des numéros $l_1(1), l_2(1), \dots, l_{2n-2}(1), 4n+1-b_1$. Donc cette ligne contient la forme z^ϵ et toutes les entrées de Φ sauf les entrées des colonnes de numéro $4n+1-b_2, l_1(2), \dots$ et $l_{2n-2}(2)$.

On considère μ_{b_2} la somme de cette ligne avec la $b_2^{\text{ème}}$ -ligne de la matrice Δ avec la condition d'homogénéité suivante

$$\zeta_{b_2} = -\zeta_{4n+1-b_2} - 2(n-1)(2n+1)(\alpha + \beta) - \epsilon + \hbar_2.$$

Une telle somme existe grâce à la condition $\epsilon = \epsilon_2 := 2n\gamma + n(2n + 1)(\alpha + \beta)$ et au fait que $\zeta_j = -\zeta_{4n+1-j} + 2(2n + 1)(\alpha + \beta)$ pour tout $1 \leq j \leq 4n$.

- On choisit maintenant une autre ligne de la matrice Δ telle que sa sous-ligne dans Ψ possède un zéro de numéro $4n + 1 - b_i$ pour $3 \leq i \leq 2n - 1$. Soient $1 \leq m_1(i) < m_2(i) < \dots < m_{2n-2}(i) \leq 4n$ les numéros des entrées nulles de cette sous-ligne dans Ψ , tels qu'ils vérifient $4n + 1 - m_r(i) = m_l(i)$ avec $1 \leq r \neq a \leq 2n - 2$. Donc cette ligne contient la forme z^ϵ et toutes les entrées de Φ sauf les entrées des colonnes de numéro $4n + 1 - b_i, m_1(i), \dots$ et $m_{2n-2}(i)$.

On considère μ_{b_i} la somme de cette ligne avec la $b_i^{\text{ème}}$ -ligne de la matrice Δ avec la condition d'homogénéité suivante

$$\zeta_{b_i} = -\zeta_{4n+1-b_i} - 2(n-1)(2n+1)(\alpha + \beta) - \epsilon + \hbar_2.$$

Une telle somme existe grâce à la condition $\epsilon = \epsilon_2 := 2n\gamma + n(2n + 1)(\alpha + \beta)$ et au fait que $\zeta_j = -\zeta_{4n+1-j} + 2(2n+1)(\alpha + \beta)$ pour tout $1 \leq j \leq 4n$. Donc on obtient la $(2n-1) \times (8n)$ -matrice suivante

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_{b_1} \\ \mu_{b_2} \\ \vdots \\ \mu_{b_{2n-1}} \end{pmatrix},$$

$$\mu : \Upsilon(-\epsilon_2) \oplus \Upsilon^*(-\hbar_1) \longrightarrow \Gamma,$$

qui existe grâce à la condition $\epsilon = \epsilon_2 := 2n\gamma + n(2n + 1)(\alpha + \beta)$ et au fait que

$$\zeta_j = -\zeta_{4n+1-j} + 2(2n + 1)(\alpha + \beta) \text{ pour tout } 1 \leq j \leq 4n.$$

On obtient donc que la matrice μ contient la forme z^{ϵ_2} et toutes les entrées de Φ car tous ces numéros $l_1(2), l_2(2), \dots, l_{2n-2}(2), l_1(1), l_2(1), \dots, l_{2n-2}(1), 4n + 1 - b_1, 4n + 1 - b_2$ sont différents. D'après la proposition 3.1.5 et la remarque 3.1.6, on a: p un mineur maximal de μ est une forme homogène qui est une somme des termes de la forme

$$\prod_{i,j} S_{i,j}^{a_{i,j}} \cdot z^{\epsilon_2 b} : a_{i,j}, b \in \mathbb{N} \text{ tels que } \epsilon_2 b + \sum_{i,j} a_{i,j} \deg(S_{i,j}) = \deg(p).$$

Donc le mineur maximal p est une somme des termes de la forme

$$X_0^{r_0} \cdot X_1^{r_1} \cdot \dots \cdot X_{2n+1}^{r_{2n+1}} \cdot z^{\epsilon_2 b} : r_0, \dots, r_{2n+1}, b \in \mathbb{N} \text{ tels que } r_0 + \dots + r_{2n+1} + \epsilon_2 b = \deg(p).$$

Soient Ξ l'idéal des mineurs maximaux de μ est engendré par tous les mineurs maximaux de μ , et $\mathcal{M} = (X_0, X_1, \dots, X_{2n+1}, z)$ un idéal maximal sur \mathbb{P}^{2n+2} , et $m := \max\{\deg(p) : p \in \Xi\}$. Alors $\mathcal{M}^m \subset \Xi$ où \mathcal{M}^m est un exposant de \mathcal{M} . Donc Ξ est \mathcal{M} -primaire sur \mathbb{P}^{2n+2} , d'après la définition de l'idéal primaire. On a aussi $\Xi \neq 0$ sur \mathbb{P}^{2n+2} . Donc l'idéal annulateur de Ξ est $\text{Ann}(\Xi) = 0$ sur \mathbb{P}^{2n+2} . Ce qui entraîne que le morphisme μ est un morphisme surjectif non nul sur \mathbb{P}^{2n+2} . D'après la proposition 2.2.4, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
& & \Gamma & & \\
& \nearrow \mu & \uparrow \text{---} & \nwarrow \aleph & \\
\Upsilon(-\epsilon_2) \oplus \Upsilon^*(-\hbar_1) & \xrightarrow{\Delta} & \Upsilon \oplus \mathcal{L}(2n(2n+1)(\alpha+\beta)) & & \\
& \searrow & \downarrow \text{---} & \nearrow & \\
& & \mathcal{G} & & \\
0 & \nearrow & & \searrow & 0
\end{array}$$

où $\aleph : \Upsilon \oplus \mathcal{L}(2n(2n+1)(\alpha+\beta)) \rightarrow \Gamma$ est un morphisme de projection surjectif, alors le morphisme suivant est représenté par le morphisme μ

$$\mathcal{G} \rightarrow \Gamma.$$

Alors on obtient la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\mu} \Gamma \rightarrow 0,$$

où \mathcal{K} est un fibré vectoriel de rang $2n+1$ sur \mathbb{P}^{2n+2} . On utilise la proposition 2.2.8 pour calculer les classes de Chern du faisceau $\mathcal{F}_{(\epsilon_2)}(\gamma)$. En utilisant la suite exacte précédente et la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \Upsilon \rightarrow \mathcal{F}_{(\epsilon_2)}(\gamma) \rightarrow 0$$

on obtient que la première classe de Chern du fibré \mathcal{G} est $c_1(\mathcal{G}) = -4n\gamma$, et la première classe de Chern du fibré \mathcal{K} est

$$c_1(\mathcal{K}) = -4n\gamma - \sum_{i=1}^{2n-1} \zeta_{b_i}.$$

□

3.1.9. Proposition. *Nous gardons les mêmes notations de la proposition 3.1.5 et du théorème 3.1.8. Soient $\mathcal{N}_{(\epsilon)}$ et $\mathcal{F}_{(\epsilon)}$ comme dans la remarque 3.1.7 et \mathcal{G} un fibré vectoriel sur \mathbb{P}^4 défini comme dans le théorème 3.1.8. On a :*

- Si $\epsilon = \epsilon_3 := 2\gamma + 7\alpha - \beta$, alors il existe un fibré vectoriel \mathcal{E}_1 (resp. \mathcal{K}_4) de rang 3 sur \mathbb{P}^4 tel que

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_1 - \epsilon_3) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow 0.$$

(resp.

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_4 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_4) \rightarrow 0).$$

- Si $\epsilon = \epsilon_4 := 2\gamma + 5\alpha + \beta$, alors il existe un fibré vectoriel \mathcal{E}_2 (resp. \mathcal{K}_3) de rang 3 sur \mathbb{P}^4 tel que

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_2 - \epsilon_4) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow 0.$$

(resp.

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_3 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_3) \longrightarrow 0).$$

- Si $\epsilon = \epsilon_5 := 2\gamma + \alpha + 5\beta$, alors il existe un fibré vectoriel \mathcal{E}_3 (resp. \mathcal{K}_2) de rang 3 sur \mathbb{P}^4 tel que

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_3 - \epsilon_5) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}_3 \longrightarrow 0.$$

(resp.

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_2 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_2) \longrightarrow 0).$$

- Si $\epsilon = \epsilon_6 := 2\gamma - \alpha + 7\beta$, alors il existe un fibré vectoriel \mathcal{E}_4 (resp. \mathcal{K}_1) de rang 3 sur \mathbb{P}^4 tel que

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_4 - \epsilon_6) \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}_4 \longrightarrow 0,$$

(resp.

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_1 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_1) \longrightarrow 0).$$

Parmi ces fibrés Il y a des fibrés qui sont différents du fibré de Tango pondéré provenant d'une image inverse généralisée sur \mathbb{P}^4 [1].

Démonstration. Dans la proposition 3.1.5 Pour $n = 1$, on a

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & -S_{1,2} & -S_{1,3} & -S_{1,4} \\ S_{1,2} & 0 & -S_{2,3} & -S_{2,4} \\ S_{1,3} & S_{2,3} & 0 & -S_{3,4} \\ S_{1,4} & S_{2,4} & S_{3,4} & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & -S_{3,4} & S_{2,4} & -S_{3,2} \\ S_{3,4} & 0 & -S_{1,4} & S_{1,3} \\ -S_{2,4} & S_{1,4} & 0 & -S_{1,2} \\ S_{3,2} & -S_{1,3} & S_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

et le fibré \mathcal{F} (resp. \mathcal{N}) est de rang 2 si et seulement si $pf(\phi) = S_{1,2}S_{3,4} - S_{1,3}S_{2,4} + S_{1,4}S_{2,3} = 0$. On fait les mêmes choses comme dans le théorème 3.1.8 avec les deux matrices précédentes pour obtenir le morphisme sur \mathbb{P}^4

$$\Delta : \Upsilon(-\epsilon) \oplus \Upsilon^*(-\hbar_1) \longrightarrow \Upsilon \oplus \Upsilon^*(\hbar_2 - \epsilon)$$

$$\Delta = \left(\frac{z^\epsilon I \mid \Phi}{\Psi \mid 0} \right),$$

où $\hbar_1 = 2\gamma - 3(\alpha + \beta) > 0$ et $\hbar_2 = 2\gamma + 9(\alpha + \beta) > 0$. On considère la condition $\epsilon = \epsilon_3 := 2\gamma + 7\alpha - \beta$. Soit

$$\begin{aligned} (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8) &\in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_1 - \epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_2 - \epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_3 - \epsilon)) \\ &\oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_4 - \epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-\zeta_1 - \hbar_1)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-\zeta_2 - \hbar_1)) \\ &\oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-\zeta_3 - \hbar_1)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-\zeta_4 - \hbar_1)). \end{aligned}$$

On prend la somme la 1^{ère}-colonne et la 5^{ème}-colonne de la matrice Δ avec la condition d'homogénéité suivante, sur la 1^{ème}-coordonnée et la 5^{ème}-coordonnée de $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8)$,

$$\begin{aligned} \deg(h_1) &= \deg(h_5) \\ -k + \zeta_1 &= -\zeta_1 - \hbar_1. \end{aligned}$$

Une telle somme existe grâce à la condition $\epsilon = \epsilon_3 := 2\gamma + 7\alpha - \beta$. Donc on obtient une colonne μ_1

$$\mu_1 = {}^T [z^{\epsilon_3}, S_{1,2}, S_{1,3}, S_{1,4}; 0, S_{3,4}, -S_{2,4}, S_{3,2}]$$

$$\mu_1 : (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_1))(-\epsilon_3) \longrightarrow \Upsilon \oplus \Upsilon^*(\hbar_2 - \epsilon_3).$$

Supposons que toutes les formes de la matrice μ_1 soient nulles sur \mathbb{P}^4 . On obtient donc que la matrice Φ est nulle, ce qui est une contradiction au fait que $rg(\Phi) = 2$. Donc toutes les formes de la matrice μ_1 n'ont pas un zéro commun sur \mathbb{P}^4 . Ce qui donne que le morphisme μ_1 est injectif non nul. Mais, le morphisme suivant est représenté par le morphisme μ_1

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_1 - \epsilon_3) \longrightarrow \mathcal{G}.$$

Alors on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_1 - \epsilon_3) \xrightarrow{\mu_1} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E}_1 \longrightarrow 0,$$

où \mathcal{E}_1 un fibré vectoriel de rang 3 sur \mathbb{P}^4 . On utilise la proposition 2.2.8 pour calculer les classes de Chern du faisceau $\mathcal{F}_{(\epsilon_3)}(\gamma)$. En utilisant la suite exacte précédente et la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \Upsilon \longrightarrow \mathcal{F}_{(\epsilon_3)}(\gamma) \longrightarrow 0$$

on obtient les classes de Chern du fibré \mathcal{E}_1

$$c_1(\mathcal{E}_1) = -2\gamma + 12\beta.$$

- Pour le fibré \mathcal{K}_4 . Soit

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) &\in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_1)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_2)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_3)) \\ &\oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_4)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\hbar_2 - \zeta_1 - \epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\hbar_2 - \zeta_2 - \epsilon)) \\ &\oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\hbar_2 - \zeta_3 - \epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\hbar_2 - \zeta_4 - \epsilon)). \end{aligned}$$

On prend la somme la 4^{ème}-ligne et la 8^{ème}-ligne de la matrice Δ avec la condition d'homogénéité suivante, sur la 4^{ème}-coordonnée et la 8^{ème}-coordonnée de $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$,

$$\begin{aligned} \deg(a_4) &= \deg(a_8) \\ \zeta_4 &= \hbar_2 - \zeta_4 - \epsilon. \end{aligned}$$

Une telle somme existe grâce à la condition $\epsilon = \epsilon_3 := 2\gamma + 7\alpha - \beta$. Donc on obtient une ligne δ

$$\delta = [S_{3,2}, -S_{1,3}, S_{1,2}, z^{\epsilon_3}, S_{1,4}, S_{2,4}, S_{3,4}, 0]$$

$$\delta : \Upsilon(-\epsilon_3) \oplus \Upsilon^*(-\hbar_1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_4).$$

Supposons que toutes les formes de la matrice δ soient nulles sur \mathbb{P}^4 . On obtient donc que la matrice Φ est nulle, ce qui est une contradiction au fait que $rg(\Phi) = 2$. Donc toutes les formes

de la matrice δ n'ont pas un zéro commun sur \mathbb{P}^4 . Ce qui donne que le morphisme δ est surjectif non nul. Mais, le morphisme suivant est représenté par le morphisme δ

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_4).$$

Alors on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_4 \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\delta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(\zeta_4) \longrightarrow 0,$$

où \mathcal{K}_4 est un fibré vectoriel de rang 3 sur \mathbb{P}^4 . On utilise la proposition 2.2.8 pour calculer les classes de Chern du faisceau $\mathcal{F}_{(\epsilon_3)}(\gamma)$. En utilisant la suite exacte précédente et la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \Upsilon \longrightarrow \mathcal{F}_{(\epsilon_3)}(\gamma) \longrightarrow 0$$

on obtient les classes de Chern du fibré \mathcal{K}_4

$$c_1(\mathcal{K}_4) = 3(3\beta - \alpha) - 4\gamma.$$

On fait la même chose pour le fibré \mathcal{E}_2 (resp. $\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$) en considérant la condition $\epsilon = \epsilon_4 := 2\gamma + 5\alpha + \beta$ (resp. $\epsilon = \epsilon_5 := 2\gamma + \alpha + 5\beta$, $\epsilon = \epsilon_6 := 2\gamma - \alpha + 7\beta$). On obtient une colonne qui est la somme de la 2^{ème} (resp. 3^{ème}, 4^{ème})-colonne et la 6^{ème} (resp. 7^{ème}, 8^{ème})-colonne de la matrice Δ sur \mathbb{P}^4 telle que les formes de cette colonne n'ont pas un zéro commun sur \mathbb{P}^4 .

On fait la même chose aussi pour le fibré \mathcal{K}_3 (resp. $\mathcal{K}_2, \mathcal{K}_1$) en considérant la condition $\epsilon = \epsilon_4 := 2\gamma + 5\alpha + \beta$ (resp. $\epsilon = \epsilon_5 := 2\gamma + \alpha + 5\beta$, $\epsilon = \epsilon_6 := 2\gamma - \alpha + 7\beta$). On obtient une ligne qui est la somme de la 3^{ème} (resp. 2^{ème}, 1^{ère})-ligne et la 7^{ème} (resp. 6^{ème}, 5^{ème})-ligne de la matrice Δ sur \mathbb{P}^4 telle que les formes de cette ligne n'ont pas un zéro commun sur \mathbb{P}^4 . Dans ces cas-là, on obtient ce que l'on recherche.

□

4. Exemple de fibré vectoriel de rang 3 sur \mathbb{P}^4

Nous construisons un fibré vectoriel de rang 3 sur l'espace projectif $\mathbb{P}^4 := \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^4$ tout en utilisant l'identité suivante de Binet-Cauchy et la méthode de Kumar-Peterson-Rao [14], où \mathbb{K} est un corps quelconque.

Soient c_i, x_i, y_i et z_i des éléments dans un anneau commutatif et $m_0 > 1$ un entier. On a l'identité suivante

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i < j \leq m_0} (x_i z_j - x_j z_i) \cdot (c_i y_j - c_j y_i) &= \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq m_0} (x_i z_j c_i y_j + x_j z_i c_j y_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq m_0} (x_i z_j c_j y_i + x_j z_i c_i y_j) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq m_0} (x_i z_j c_i y_j + x_j z_i c_j y_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq m_0} (x_i z_j c_j y_i + x_j z_i c_i y_j) \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq m_0} x_i z_i c_i y_i - \sum_{1 \leq i \leq m_0} x_i z_i c_i y_i \end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m_0} x_i c_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m_0} y_j z_j \right) - \left(\sum_{i=1}^{m_0} x_i y_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m_0} z_j c_j \right).$$

Cette identité s'appelle *l'identité de Binet-Cauchy*. En particulier pour $m_0 = 2$, on a l'identité suivante

$$(8) \quad (x_1 c_1 + x_2 c_2) \cdot (y_1 z_1 + y_2 z_2) = (x_1 y_1 + x_2 y_2) \cdot (c_1 z_1 + c_2 z_2) + (x_1 z_2 - x_2 z_1) \cdot (c_1 y_2 - c_2 y_1)$$

4.1. Fibré vectoriel de rang 2 sur \mathbb{P}^3 . Dans cette partie, nous allons construire et étudier une famille de fibrés vectoriels de rang 2 sur $\mathbb{P}^3 := \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ où \mathbb{K} est un corps quelconque, tout en utilisant les matrices antisymétriques des formes sur \mathbb{P}^3 .

4.1.1. Morphisme associé à une matrice antisymétrique sur \mathbb{P}^3 . Soient $(S_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq 4}$ des polynômes homogènes de 4 variables (des formes sur \mathbb{P}^3). On considère une matrice 4×4 antisymétrique

$$M = \begin{pmatrix} 0 & S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,4} \\ S_{2,1} & 0 & S_{2,3} & S_{2,4} \\ S_{3,1} & S_{3,2} & 0 & S_{3,4} \\ S_{4,1} & S_{4,2} & S_{4,3} & 0 \end{pmatrix},$$

avec $S_{i,j} = -S_{j,i}$ et $d_{ij} = \deg(S_{i,j}) = \deg(-S_{j,i}) = d_{ji}$. On définit le pfaffien de la matrice antisymétrique M par $(pf M)^2 = \det(M)$ qui est le polynôme homogène (équation du Plücker pour la grassmannienne $G(2,4)$)

$$Q = pf(M) = S_{1,2}S_{3,4} - S_{1,3}S_{2,4} + S_{1,4}S_{2,3}.$$

Il a un degré

$$\deg(Q) = d = d_{12} + d_{34} = d_{13} + d_{24} = d_{14} + d_{23}.$$

On suppose que les formes $(S_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq 4}$ n'ont pas de zéro commun sur \mathbb{P}^3 . Donc en calculant les mineurs 2×2 et 3×3 de la matrice M , on constate que M est de rang 2 en tout point de \mathbb{P}^3 si et seulement si le polynôme $Q = 0$.

On définit la matrice associée à une matrice antisymétrique M . En utilisant le fait que $Q = 0$, on obtient la matrice antisymétrique suivante

$$N = \begin{pmatrix} 0 & S_{3,4} & -S_{2,4} & S_{3,2} \\ -S_{3,4} & 0 & S_{1,4} & -S_{1,3} \\ S_{2,4} & -S_{1,4} & 0 & S_{1,2} \\ -S_{3,2} & S_{1,3} & -S_{1,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient que la matrice N est de rang 2, et $M.N = N.M = 0$. On considère ψ_0 le morphisme de fibrés suivant associé à la matrice M

$$\psi_0 : \mathbb{F} := \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_i) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(b_i).$$

On peut supposer que $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. Donc on peut trouver facilement les relations suivantes

$$d_{ij} = b_i - a_j \quad \text{si } 1 \leq i \neq j \leq 4.$$

Soit $\Lambda_{ij} = d_{1j} - d_{ij}$ pour $1 < j \leq 4$ et $1 \leq i \leq 4$, donc on a

$$a_i = a_1 + \Lambda_{ij} \quad , \quad b_i = b_1 - \Lambda_{ij}.$$

On a aussi $b_n = a_1 + d_{in} + \Lambda_{ij}$, si n est un entier tel que $i \neq n$ et $1 \leq n \leq 4$. On a

$$b_1 = a_1 + d_{12} + d_{13} + d_{14} - d = a_1 - d_{34} - d_{23} - d_{24} + 2d.$$

Donc on a

$$\mathbb{F} = \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_i) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_1 + \Lambda_{2j}) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_1 + \Lambda_{3j}) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_1 + \Lambda_{4j}).$$

Donc le morphisme ψ_0 devient

$$(9) \quad \psi_0 : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}^*(b_1 + a_1).$$

On suppose, dans la suite de notre étude, que $Q = 0$. On considère φ_0 le morphisme suivant de fibrés associé à la matrice N

$$\varphi_0 : \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(q_i) \longrightarrow \mathbb{F} = \bigoplus_{i=1}^4 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_i).$$

On obtient alors les relations suivantes

$$q_m = a_i - d_{lr},$$

où i, r, l, m sont des entiers distincts tels que $1 \leq i, r, l, m \leq 4$. Donc on a

$$q_m = b_m - d_{im} - d_{lr} = b_1 - d - \Lambda_{mj},$$

où j est un entier tel que $1 \leq j \neq m \leq 4$. Alors le morphisme φ_0 devient

$$(10) \quad \varphi_0 : \mathbb{F}^*(b_1 + a_1 - d) \longrightarrow \mathbb{F}.$$

Des morphismes 9 et 10, on obtient un complexe

$$\mathbb{F}^*(b_1 + a_1 - d) \xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{F} \xrightarrow{\psi_0} \mathbb{F}^*(b_1 + a_1).$$

Pour $e \in \mathbb{Z}$ entier, on considère les morphismes de fibrés

$$\varphi_e : \mathbb{F}^*(b_1 + a_1 + (e - 1)d) \longrightarrow \mathbb{F}(ed),$$

$$\psi_e : \mathbb{F}(ed) \longrightarrow \mathbb{F}^*(b_1 + a_1 + ed).$$

Donc on obtient un complexe associé infini de deux côtés,

$$\dots \xrightarrow{\psi_{-3}} \mathbb{F}^*(b_1 + a_1 - 3d) \xrightarrow{\varphi_{-2}} \mathbb{F}(-2d) \xrightarrow{\psi_{-2}} \mathbb{F}^*(b_1 + a_1 - 2d) \xrightarrow{\varphi_{-1}} \mathbb{F}(-d) \xrightarrow{\psi_{-1}} \mathbb{F}^*(b_1 + a_1 - d)$$

$$\xrightarrow{\varphi_0} \mathbb{F} \xrightarrow{\psi_0} \mathbb{F}^*(b_1 + a_1) \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{F}(d) \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{F}^*(b_1 + a_1 + d) \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{F}(2d) \xrightarrow{\psi_2} \mathbb{F}^*(b_1 + a_1 + 2d) \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

4.1.2. Définition du fibré de rang 2 sur \mathbb{P}^3 . Soient les morphismes ψ_0 et φ_0 9 et 10 dans 4.1.1. On obtient que $\mathbb{A} = \text{Im}\varphi_0$ et $\mathbb{B} = \text{Im}\psi_0$ sont des fibrés vectoriels de rang 2 sur \mathbb{P}^3 . On a le complexe suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \mathbb{F}^*(b_1 + a_1 - d) & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{F} & \xrightarrow{\psi_0} & \mathbb{F}^*(b_1 + a_1) & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathbb{F}(d) \dots \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 & & \mathbb{A} & & \mathbb{B} & & \mathbb{A}(d) \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

4.1.3. Proposition. Soient \mathbb{A} et \mathbb{B} les fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^3 qui sont définis dans 4.1.2. Les classes de Chern de fibrés vectoriels \mathbb{A} et \mathbb{B} sont

$$c_1(\mathbb{B}) = b_1 + a_1 = 2a_1 + d_{13} - d_{23} - d_{12}.$$

$$c_2(\mathbb{B}) = -\frac{1}{d} \{a_1 a_2 a_3 + a_1 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_4 + a_2 a_3 a_4$$

$$-(b_1 + a_1)(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4 - (b_1 + a_1)(b_1 + a_1 - d))\}.$$

$$c_1(\mathbb{A}) = b_1 + a_1 - d = 2a_1 + d_{13} - d_{23} - d_{34}.$$

$$c_2(\mathbb{A}) = \frac{1}{d} \{a_1 a_2 a_3 + a_1 a_3 a_4 + a_1 a_2 a_4 + a_2 a_3 a_4$$

$$-(b_1 + a_1 - d)(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_1 a_4 + a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4 - (b_1 + a_1)(b_1 + a_1 - d))\}.$$

Démonstration. Comme \mathbb{A} , \mathbb{B} sont des fibrés vectoriels de rang 2, alors on a un morphisme surjectif de fibrés

$$\mathbb{F}^*(c_1(\mathbb{A})) \longrightarrow \mathbb{A},$$

et un morphisme injectif de fibrés

$$\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{F}^*(c_1(\mathbb{B})).$$

Donc on a que

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{F}^*(c_1(\mathbb{A})) & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{F} & \xrightarrow{\varrho} & \mathbb{F}^*(c_1(\mathbb{B})) \\
& \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
& & \mathbb{A} & & \mathbb{B} \\
& \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
0 & & 0 & & 0.
\end{array}$$

et $\rho = \varphi_0$, $\varrho = \psi_0$. Alors on a

$$c_1(\mathbb{B}) = b_1 + a_1 = 2a_1 + d_{13} - d_{23} - d_{12},$$

$$c_1(\mathbb{A}) = b_1 + a_1 - d = 2a_1 + d_{13} - d_{23} - d_{34}.$$

On calcule le reste des classes de Chern directement tout en utilisant la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{B} \longrightarrow 0.$$

□

4.1.4. Proposition. Soient $\{T_i\}$, $\{W_i\}$, $\{V_i\}$, $\{U_i\}$, $1 \leq i \leq 2$ des formes homogènes sur \mathbb{P}^3 de degrés positifs $\deg(T_i) = t_i$, $\deg(W_i) = w_i$, $\deg(V_i) = v_i$, $\deg(U_i) = u_i$. On considère les formes homogènes sur \mathbb{P}^3 suivantes

$$S_{1,3} = T_1.W_1 + T_2.W_2, \quad S_{2,4} = U_1.V_1 + U_2.V_2$$

$$S_{1,2} = T_1.U_1 + T_2.U_2, \quad S_{3,4} = V_1.W_1 + V_2.W_2$$

$$S_{1,4} = T_1.V_2 - T_2.V_1, \quad S_{2,3} = U_2.W_1 - U_1.W_2$$

telles que $(S_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq 4}$ n'ont pas de zéro commun sur \mathbb{P}^3 . On considère les conditions suivantes

$$t_2 = w_2, \quad u_2 = v_2, \quad t_1 = -w_1 + 2w_2, \quad u_1 = w_1 - w_2 + v_2, \quad v_1 = -w_1 + w_2 + v_2,$$

avec $w_2, v_2 > 0$ et $0 \leq w_2 - v_2 \leq w_1 \leq w_2 + v_2$. On considère M et N des 4×4 -matrices antisymétriques suivantes

$$M = \begin{pmatrix} 0 & S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,4} \\ S_{2,1} & 0 & S_{2,3} & S_{2,4} \\ S_{3,1} & S_{3,2} & 0 & S_{3,4} \\ S_{4,1} & S_{4,2} & S_{4,3} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$N = \begin{pmatrix} 0 & S_{3,4} & -S_{2,4} & S_{3,2} \\ -S_{3,4} & 0 & S_{1,4} & -S_{1,3} \\ S_{2,4} & -S_{1,4} & 0 & S_{1,2} \\ -S_{3,2} & S_{1,3} & -S_{1,2} & 0 \end{pmatrix}$$

On considère aussi les morphismes φ_0 et ψ_0 9 et 10 associés respectivement aux matrices anti-symétriques N et M dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{F}^*(b_1 + a_1 - d) & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{F} & \xrightarrow{\psi_0} & \mathbb{F}^*(b_1 + a_1) & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathbb{F}(d) \\
 & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
 & & \mathcal{A} & & \mathcal{B} & & \mathcal{A}(d) \\
 & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Alors on a

I) $M.N = N.M = 0$ et $S_{1,2}.S_{3,4} - S_{1,3}.S_{2,4} + S_{1,4}.S_{2,3} = 0$ et $b_1 = 3w_2 - w_1 + a_1$ et $d = 2(w_2 + v_2)$.

II) On a le fibré $\mathbb{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_1 + 2w_2 - w_1 - v_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_1 + w_2 - w_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a_1 + w_2 - v_2)$, pour tout $a_1 \in \mathbb{Z}$.

III) On a deux fibrés vectoriels $\mathcal{A} = \text{Im}\varphi_0$ et $\mathcal{B} = \text{Im}\psi_0$ de rang 2 sur \mathbb{P}^3 avec des classes de Chern, pour $a_1 = 0$,

$$c_1(\mathcal{B}) = 3w_2 - w_1, \quad c_2(\mathcal{B}) = w_2(2w_2 - w_1 + v_2),$$

$$c_1(\mathcal{A}) = w_2 - w_1 - 2v_2, \quad c_2(\mathcal{A}) = v_2(w_1 + v_2).$$

Démonstration. Il suffit de prendre dans l'identité de Binet-Cauchy 8

$$x_1 = T_1, \quad x_2 = T_2, \quad y_1 = U_1, \quad y_2 = U_2, \quad c_1 = W_1, \quad c_2 = W_2, \quad z_1 = V_1, \quad z_2 = V_2,$$

pour obtenir

$$S_{1,2}.S_{3,4} - S_{1,3}.S_{2,4} + S_{1,4}.S_{2,3} = 0.$$

En utilisant 4.1.1 et 4.1.3, on obtient (II) et (III). □

4.2. Fibré vectoriel de rang 3 sur \mathbb{P}^4 . Dans cette partie, nous allons construire un exemple de fibrés vectoriels de rang 3 sur $\mathbb{P}^4 := \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^4$ à partir d'un fibré de rang 2 sur la variété $\mathbb{P}^3 := \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^3$ où \mathbb{K} est un corps quelconque, tout en utilisant 4.1 et 2.2.

4.2.1. Remarque. Soient $z \in H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1)) \setminus \{0\}$ et $\mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^4$ l'hyperplan de \mathbb{P}^4 défini par l'équation $z = 0$. Soient $\epsilon \geq 1$ un entier et $Y_{(\epsilon)} \subset \mathbb{P}^4$ le voisinage infinitésimal de l'ordre ϵ de \mathbb{P}^3 dans \mathbb{P}^4 , défini par l'équation $z^\epsilon = 0$. On a les morphismes d'inclusion suivants

$$\mathbb{P}^3 := Y_{(1)} \xrightarrow{b_{(2)}} Y_{(2)} \xrightarrow{b_{(3)}} \dots \xrightarrow{b_{(\epsilon)}} Y_{(\epsilon)} \xrightarrow{d} \mathbb{P}^4.$$

Soit $e_0 \in \mathbb{P}^4 \setminus Y_{(\epsilon)}$, on définit la projection d'un point (voir [5] page 22) sur un sous-espace projectif \mathbb{P}^3 par

$$\pi : \mathbb{P}^4 \setminus \{e_0\} \longrightarrow \mathbb{P}^3$$

$$e \longmapsto \pi(e)$$

où $\pi(e)$ est l'intersection de \mathbb{P}^3 avec la droite unique passant par les points e_0, e . On considère la restriction de la projection π sur le voisinage infinitésimal $Y_{(\epsilon)}$, on obtient la projection d'un point sur un sous-espace projectif \mathbb{P}^3

$$J_{(\epsilon)} : Y_{(\epsilon)} \longrightarrow \mathbb{P}^3.$$

On considère $\mathcal{B}_{(\epsilon)} = J_{(\epsilon)}^* \mathcal{B}$ et $\mathcal{A}_{(\epsilon)} = J_{(\epsilon)}^* \mathcal{A}$ où \mathcal{B} et \mathcal{A} sont les fibrés vectoriels dans la proposition 4.1.4. Alors on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_{(\epsilon)} \longrightarrow \mathbb{F}_{(\epsilon)} \longrightarrow \mathcal{B}_{(\epsilon)} \longrightarrow 0,$$

où $\mathbb{F}_{(\epsilon)} = \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}} \oplus \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(t_1 - v_2) \oplus \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(t_1 - w_2) \oplus \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(w_2 - v_2)$.

4.2.2. Proposition. Soient $\mathcal{A}_{(\epsilon)}$ et $\mathcal{B}_{(\epsilon)}$ comme dans la remarque 4.2.1, et G_2 un fibré vectoriel sur \mathbb{P}^4 défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \hat{F}(-\epsilon) & \xlongequal{\quad} & \hat{F}(-\epsilon) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & \hat{F} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{(\epsilon)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_{(\epsilon)} & \longrightarrow & \mathbb{F}_{(\epsilon)} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{(\epsilon)} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

où $\hat{\mathbb{F}} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2w_2 - w_1 - v_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(w_2 - w_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(w_2 - v_2)$. Dans la proposition 4.1.4, si on a que $c_1(\mathcal{A}) = w_2 - w_1 - 2v_2 = -\epsilon \leq -1$ et ϵ vérifie une des conditions suivantes

1- $2v_2 - w_2 \leq \epsilon \leq 2v_2 + w_2$ si $v_2 \geq w_2 > 0$

2- $v_2 \leq \epsilon \leq 3v_2$ si $0 < v_2 \leq w_2$

alors il existe un fibré vectoriel E_2 de rang 3 sur \mathbb{P}^4 tel que

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-\epsilon) \longrightarrow G_2 \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0,$$

qui est différent du fibré de Tango pondéré provenant d'une image inverse généralisée sur \mathbb{P}^4 .

Démonstration. Soient \mathcal{A} , \mathcal{B} les fibrés dans la proposition 4.1.4, on a le diagramme suivant sur \mathbb{P}^3

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{F}^*(w_2 - w_1 - 2v_2) & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{F} & \xrightarrow{\psi_0} & \mathbb{F}^*(3w_2 - w_1) \\
& \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
& & \mathcal{A} & & \mathcal{B} \\
& \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

où $\mathbb{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2w_2 - w_1 - v_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(w_2 - w_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(w_2 - v_2)$. En prenant l'image inverse du diagramme précédent par la projection d'un point sur un sous-espace projectif \mathbb{P}^3 , 4.2.1 ,

$$J_{(\epsilon)} : Y_{(\epsilon)} \longrightarrow \mathbb{P}^3,$$

on obtient le diagramme suivant sur $Y_{(\epsilon)}$

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{F}_{(\epsilon)}^*(w_2 - w_1 - 2v_2) & \xrightarrow{\varphi_0} & \mathbb{F}_{(\epsilon)} & \xrightarrow{\psi_0} & \mathbb{F}_{(\epsilon)}^*(3w_2 - w_1) \\
& \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\
& & \mathcal{A}_{(\epsilon)} & & \mathcal{B}_{(\epsilon)} \\
& \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\
0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

où $\mathbb{F}_{(\epsilon)} = \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}} \oplus \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(2w_2 - w_1 - v_2) \oplus \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(w_2 - w_1) \oplus \mathcal{O}_{Y_{(\epsilon)}}(w_2 - v_2)$. En choisissant les mêmes notations de 2.2 avec $\Phi = \varphi_0$ et $\Psi = \psi_0$ sur \mathbb{P}^4 , tous les fibrés $\mathbb{F}_{(\epsilon)}^*(w_2 - w_1 - 2v_2)$, $\mathbb{F}_{(\epsilon)}$ et $\mathbb{F}_{(\epsilon)}^*(3w_2 - w_1)$ peuvent se relever en fibrés $\hat{F}^*(w_2 - w_1 - 2v_2)$, \hat{F} et $\hat{F}^*(3w_2 - w_1)$ respectivement sur \mathbb{P}^4 . On obtient donc le complexe suivant sur \mathbb{P}^4

$$\hat{F}^*(w_2 - w_1 - 2v_2) \xrightarrow{\Phi} \hat{F} \xrightarrow{\Psi} \hat{F}^*(3w_2 - w_1),$$

où $\Psi \cdot \Phi = \psi_0 \cdot \phi_0 = 0$. Donc on peut définir le morphisme suivant sur \mathbb{P}^4

$$\Delta : \hat{F}(-\epsilon) \oplus \hat{F}^*(w_2 - w_1 - 2v_2) \longrightarrow \hat{F} \oplus \hat{F}^*(3w_2 - w_1 - \epsilon),$$

$$\Delta = \left(\begin{array}{c|c} z^\epsilon I & \Phi \\ \hline \Psi & 0 \end{array} \right).$$

$$\Delta = \left(\begin{array}{cccc|cccc}
z^\epsilon & & & 0 & 0 & S_{3,4} & -S_{2,4} & S_{3,2} \\
& z^\epsilon & & & -S_{3,4} & 0 & S_{1,4} & -S_{1,3} \\
0 & & z^\epsilon & & S_{2,4} & -S_{1,4} & 0 & S_{1,2} \\
& & & z^\epsilon & -S_{3,2} & S_{1,3} & -S_{1,2} & 0 \\
\hline
0 & S_{1,2} & S_{1,3} & S_{1,4} & & & & \\
S_{2,1} & 0 & S_{2,3} & S_{2,4} & & & & \\
S_{3,1} & S_{3,2} & 0 & S_{3,4} & & & & \\
S_{4,1} & S_{4,2} & S_{4,3} & 0 & & & &
\end{array} \right)$$

On a

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{F}(-\epsilon) \oplus \hat{F}^*(w_2 - w_1 - 2v_2) & \xrightarrow{\Delta} & \hat{F} \oplus \hat{F}^*(3w_2 - w_1 - \epsilon) \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & G_2 & \\
 0 & \nearrow & \searrow \\
 & 0 &
 \end{array}$$

D'après la proposition 2.2.2 et la remarque 2.2.3. Soit

$$\begin{aligned}
 (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8) \in & H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-\epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2w_2 - w_1 - v_2 - \epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(w_2 - w_1 - \epsilon)) \\
 & \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(w_2 - v_2 - \epsilon)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(w_2 - w_1 - 2v_2)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-w_2 - v_2)) \\
 & \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2v_2)) \oplus H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-w_1 - v_2)).
 \end{aligned}$$

On prend la somme la 1^{ère}-colonne et la 5^{ème}-colonne de la matrice Δ avec la condition d'homogénéité suivante, sur la 1^{ère}-coordonnée et la 5^{ème}-coordonnée de

$$(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8),$$

$$\begin{aligned}
 \deg(h_1) &= \deg(h_5) \\
 -\epsilon &= w_2 - w_1 - 2v_2.
 \end{aligned}$$

Une telle somme existe grâce à la condition $c_1(\mathcal{A}) = w_2 - w_1 - 2v_2 = -\epsilon$. Donc on obtient une colonne τ

$$\tau = {}^T [z^\epsilon, S_{1,2}, S_{1,3}, S_{1,4}; 0, S_{3,4}, -S_{2,4}, S_{3,2}]$$

$$\tau : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(w_2 - w_1 - 2v_2) \longrightarrow \hat{F} \oplus \hat{F}^*(4w_2 - 2w_1 - 2v_2).$$

Supposons que toutes les formes de la matrice τ soient nulles sur P^4 . On obtient donc que la matrice Φ est nulle, ce qui est une contradiction au fait que $rg(\Phi) = 2$. Donc pour tout $x \in \mathbb{P}^4$ il existe une forme des formes $z^\epsilon, S_{1,2}, S_{1,3}, S_{1,4}, S_{3,4}, S_{2,4}, S_{3,2}$ qui ne s'annule pas en x . Ce qui donne que le morphisme τ est injectif non nul sur \mathbb{P}^4 . Mais, le morphisme suivant est représenté par le morphisme τ

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(w_2 - w_1 - 2v_2) \longrightarrow G_2;$$

alors on a la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(w_2 - w_1 - 2v_2) \longrightarrow G_2 \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0,$$

où E_2 est un fibré vectoriel de rang 3 sur \mathbb{P}^4 . On utilise la proposition 2.2.8 pour calculer les classes de Chern du faisceau $d_*(\mathcal{B}_{(-w_2+w_1+2v_2)})$. En utilisant la suite exacte précédente et la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow G_2 \longrightarrow \hat{F} \longrightarrow \mathcal{B}_{(-w_2+w_1+2v_2)} \longrightarrow 0$$

on obtient les classes de Chern du fibré E_2

$$c_1(E_2) = 2(w_2 + v_2) - 3(-w_2 + w_1 + 2v_2),$$

$$c_2(E_2) = 2(-w_2 + w_1 + 2v_2)^2 - (-w_2 + w_1 + 2v_2)(3w_2 + v_2) + w_2^2 - v_2^2 + 4w_2v_2,$$

$$c_3(E_2) = 2v_2(-(-w_2 + w_1 + 2v_2)^2 + 2v_2(-w_2 + w_1 + 2v_2) + w_2^2 - v_2^2).$$

□

4.2.3. Lemme. [16] *Soit E un fibré vectoriel de rang r sur \mathbb{P}^n engendré par ses sections globales. Si la classe de Chern $c_r(E) = 0$, alors il existe une section non-nulle de E . Autrement dit, E contient un sous-fibré trivial de rang 1.*

4.2.4. Théorème. *Soient E_2 , G_2 , $\mathcal{A}_{(\epsilon)}$ et $\mathcal{B}_{(\epsilon)}$ des fibrés vectoriels sur \mathbb{P}^4 comme dans la proposition 4.2.2 avec $v_2 = w_2 = w_1 = n > 0, \epsilon = 2n$ des entiers. Alors il existe un fibré vectoriel indécomposable L_2 de rang 2 sur \mathbb{P}^4 tel que*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \longrightarrow E_2 \longrightarrow L_2 \longrightarrow 0,$$

son polynôme de Chern est $c_h(L_2) = 1 - 2nh + 4n^2h^2$ où $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1))$.

Démonstration. D'après la proposition 4.2.2, si on considère $v_2 = w_2 = w_1 = n > 0, \epsilon = 2n$, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathbb{K}^4 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2n) & \xlongequal{\quad} & \mathbb{K}^4 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2n) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & \mathbb{K}^4 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{(2n)} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_{(2n)} & \longrightarrow & \mathbb{K}^4 \otimes \mathcal{O}_{Y_{(2n)}} & \longrightarrow & \mathcal{B}_{(2n)} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

avec E_2 un fibré vectoriel de rang 3 sur \mathbb{P}^4 tel que

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(-2n) \longrightarrow G_2 \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0,$$

son polynôme de Chern est $c_h(E_2) = 1 - 2nh + 4n^2h^2$ où $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(1))$. Donc on a

$$h^0(E_2) = h^0(G_2) = h^0(\mathcal{A}_{(2n)}) = 1.$$

On va démontrer que le fibré E_2 est engendré par ses sections globales.

Pour tout $y = \mathbb{K}.v \in \mathbb{P}^4 = \mathbb{P}(V)$ où $v \in V$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(\mathcal{A}_{(2n)}) & \longrightarrow & (\mathbb{K}^4)^* & \xrightarrow{q} & H^0(\mathcal{B}_{(2n)}) \longrightarrow \\
& & \downarrow \text{ev}_{\mathcal{A}_{(2n)}} & & \downarrow \text{ev}_{\mathbb{K}^4 \otimes \mathcal{O}_{Y(2n)}} & & \downarrow \text{ev}_{\mathcal{B}_{(2n)}} \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_{(2n)y} & \longrightarrow & \mathbb{K}^4 & \xrightarrow{q} & \mathcal{B}_{(2n)y} \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & 0 & &
\end{array}$$

où $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ et $q_i \in H^0(\mathbb{K}^4 \otimes \mathcal{O}_{Y(2n)}) = (\mathbb{K}^4)^*$, $i = 1, \dots, 4$, sont des sections de $\mathcal{B}_{(2n)}$. Donc les générateurs de $H^0(\mathcal{A}_{2n})$ sont $e_2 = (-q_2, q_1, 0, 0)$, $e_3 = (-q_3, 0, q_1, 0)$, $e_4 = (-q_4, 0, 0, q_1)$. Alors pour tout $X = (X_1, X_2, X_3, X_4) \in \mathcal{A}_{(2n)y}$, on a $qX = 0$. On obtient que

$$Xq_1 = X_2e_2 + X_3e_3 + X_4e_4 \in H^0(\mathcal{A}_{(2n)}).$$

Donc $X \in H^0(\mathcal{A}_{(2n)})$, et le fibré $\mathcal{A}_{(2n)}$ est engendré par ses sections globales. On a aussi les carrés commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccccc}
G_2 & \longrightarrow & \mathcal{A}_{(2n)} & \longrightarrow & 0 \\
\text{ev}_{G_2} \uparrow & & \uparrow \text{ev}_{\mathcal{A}_{2n}} & & \\
H^0(G_2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} & \xrightarrow{\sim} & H^0(\mathcal{A}_{2n}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} & &
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
G_2 & \longrightarrow & E_2 & \longrightarrow & 0 \\
\text{ev}_{G_2} \uparrow & & \uparrow \text{ev}_{E_2} & & \\
H^0(G_2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} & \xrightarrow{\sim} & H^0(E_2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} & &
\end{array}$$

qui nous donnent que le fibré E_2 est engendré par ses sections globales. D'après le lemme 4.2.3 et comme on a $c_3(E_2) = 0$, on obtient alors que le fibré E_2 a un sous-fibré en droite. Autrement dit, on a un fibré vectoriel L_2 de rang 2 sur \mathbb{P}^4 défini par la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4} \longrightarrow E_2 \longrightarrow L_2 \longrightarrow 0,$$

son polynôme de Chern est $c_h(L_2) = c_h(E_2) = 1 - 2nh + 4n^2h^2$. Comme ce polynôme de Chern est irréductible dans l'anneau $H^*(Pn, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[h] = \mathbb{Z}[t]/(t^5)$, alors le fibré L_2 est indécomposable.

□

RÉFÉRENCES

- [1] Bahtiti, M. *Fibré de Tango pondéré généralisé de rang $n - 1$ sur l'espace \mathbb{P}^n* . arXiv:1508.07159. 2015.
- [2] Bahtiti, M. *Fibré vectoriel de 0-corrélation pondéré sur l'espace \mathbb{P}^{2n+1}* . arXiv:1508.01776. 2015.
- [3] Brînzănescu, V. *Holomorphic Vector Bundles over Compact Complex Surfaces*. Lect. Notes in Math. 1624. Springer-Verlag, Berlin (1996).
- [4] Fulton, W. *Intersection theory*. Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [5] Hartshorne, R. *Algebraic geometry*. Grada.Text in Math. 52. Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [6] Horrocks, G. *Examples of rank three vector bundles on five-dimensional projective space*. J. London Math. Soc. 18 (1978), 15-27.

- [7] Horrocks, G. *Construction of bundles on \mathbb{P}^n* . In A. Douady and J-L. Verdier, editors, Les équations de Yang-Mills, volume 71-72 of Astérisque, pages 197-203, 1980.
- [8] Horrocks, G. *Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring*. Proc. London. Math. Soc. 14 (1964), 689-713.
- [9] Hoppe, H.J. *Stable generischer spaltungstyp und zweite Chernklasse stabiler Vektorraumbundel vom Rang 4 auf P^4* , Math. Zeitschrift bf 187 (1984), 345-360.
- [10] Husemoller, D. *Fibre Bundles*. Third edition. Grad. Texts in Math. 20. Springer-Verlag, New York (1994).
- [11] Huieck, K. *The Horrocks-Mumford bundle, Vector Bundles in Algebraic Geometry Durham 1993*. London Mathematical Society Lecture Note Series. 208 pp. 139-178.
- [12] Huybrecht, D. lehn, M. *The geometry of moduli space of scheaves*. Seco. edition. Cambr.Univ.Press. 2010.
- [13] Kumar, N. *Construction of rank two vector bundles on \mathbb{P}^4 in positive characteristic*. Invent. Math., 130:277-286, 1997.
- [14] Kumar, N. Peterson, C. Rao, P. *Construction of low rank vector bundles on \mathbb{P}^4 and \mathbb{P}^5* . Jour. Alg. Geometry, 11:203-217, 2002.
- [15] Le Potier, J. *Lectures on vector bundles*. Cambridge Studies in Adv. Math. 54. Cambridge University Press (1997).
- [16] Okonek, C. Schneider, M. Spindler, H. *Vector bundles on complex projective spaces with an appendix by S. I. Gelfand*. Progress in Math. 3. Birkhäuser (1980).
- [17] Qing, L. *Algebraic geometry and arithmetic curves*. Oxford University Press, New York (2002).

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, CASE 247, 4 PLACE JUSSIEU,
F-75252 PARIS, FRANCE

E-mail address: mohamed.bahtiti@imj-prg.fr